2023 考研数学真题

考试时间：180 分钟，试卷总分：150 分

科目：数学二　　　　　　姓名：

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将答案写在答题纸指定位置上.. . .

（1） 曲线的 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)$. 斜渐近线方程为【　　】

（A） $y=x+e$.　　（B） $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.　　（C） $y=x$.　　（D） $y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【答案】 B.

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)=1$.

$$\lim_{x\to\infty} y-x=\lim_{x\to 0}x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-x=\lim_{x\to\infty}x\left(\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{(x-1)e}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x-1)e}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)e}=\frac{1}{e}$$

$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.选 B.

（2） 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为【　　】

（A） $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$　　（B） $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

（C） $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$　　（D） $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$.

【答案】 D.

【解析】 $F(x)=\begin{cases}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C_1\\ \int(x+1)\cos x dx=\int(x+1)d\sin x=(x+1)\sin x+\cos x+C_2\end{cases}$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续， $C_1=C_2+1$，若$C_2=0$，则$C_1=1$,选 D.

（3）已知$\{x_n\},\{y_n\}$满足$x_1=y_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\sin x_n,y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots)$，则当$n\to\infty$时,【　　】

（A）x_n是y_n的高阶无穷小.　　　（B）y_n是x_n的高阶无穷小.

（C）x_n与y_n是等价无穷小.　　　（D）x_n与y_n是同阶但不等价的无穷小.

【答案】B.

【解析】

在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$中，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x$

故$x_{n+1}=\sin x_n>\dfrac{2}{\pi}x_n$

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n\Rightarrow\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}<\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y_n}{x_n}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{y_n}{x_n}=\cdots=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\frac{y_1}{x_1}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=0$. 故$y_n$是$x_n$的高阶无穷小. 选$B$.

（4）若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则【　　】

（A）$a<0,\ b>0$.　（B）$a>0,\ b>0$.　（C）$a=0,\ b>0$.（D）$a=0,\ b<0$.

【答案】C.

【解析】二阶常系数齐次线性微分方程$y''+ay'+by=0$特征方程为：$\lambda^2+a\lambda+b=0$

①当$\Delta=a^2-4b>0$时，设其两不同特征值为λ_1,λ_2，则其通解结构为：$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

不管λ_1,λ_2的正负如何，其在$x\to\infty$时，$y(x)\to\infty$，其必然为无界函数.舍去.

②当$\Delta=a^2-4b=0$时，设其两相同特征值为$\lambda_1=\lambda_2$，则其通解结构为$y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$.

不管λ_1,λ_2的正负如何，其在$x\to\infty$时，$y(x)\to\infty$，其必然为无界函数.舍去.

③当$\Delta=a^2-4b<0$.时，设其两特征值为$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则其通解结构为

$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)$.

若$\alpha\neq0$，则$x\to\infty$时，$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)$为无界函数，即$\alpha=0$

当$\alpha=0$时，$y(x)=C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x$为有界函数,满足题意$\Delta=a^2-4b<0$，

此时$a=0,\ b>0$故选（C）.

（5）设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t+|t| \\ y=|t|\sin t \end{cases}$ 确定，则【　　】

（A） $f(x)$ 连续， $f^{'}(0)$ 不存在.

（B） $f^{'}(0)$ 存在， $f^{'}(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

（C） $f^{'}(x)$ 连续， $f^{''}(0)$ 不存在.

（D） $f^{''}(0)$ 存在， $f^{''}(x)$ 在 x=0 处不连续.

【答案】C.
【解析】

$x\geq 0$

$\begin{cases} x=2t+t \\ y=t\sin t \end{cases}$

$x<0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\begin{cases} x=2t-t \\ y=-t\sin t \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin t+t\cos t}{3}, x\geq 0 \\ 0 \\ -\sin t-t\cos t, x<0 \end{cases}, \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0=f'(0), f'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续.}$$

$$f_+^{''}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{'}(x)-f^{'}(0)}{x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t+t\cos t}{3\cdot 3t}=\frac{2}{9};$$

$$f^{''}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f^{'}(x)-f^{'}(0)}{x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sin t-t\cos t}{t}=-2 \quad \cdots$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f''(x)$, $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，选 C.

（6）若函数 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{dx}$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值，则 $\alpha_0=$【　　】

（A） $-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$　　　　（B） $-\ln(\ln 2)$

（C） $\dfrac{1}{\ln 2}$　　　　（D） $\ln 2$

【答案】A.
【解析】

要使得 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{dx}$ 收敛， $a>0$.

$$f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{dx}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{dlnx}=(\ln x)^{-\alpha}\Big|_2^{+\infty}=0-\frac{1}{\alpha}(\ln 2)^{-\alpha}=\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$f'(\alpha)=-\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha^{2}}-\frac{\ln\ln 2}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\ln\ln 2\right)=0,\ \alpha_{0}=-\frac{1}{\ln\ln 2}$. 选 A.

（7）设函数 $f(x)=\left(x^{2}+a\right)\mathrm{e}^{x}$，若 $f(x)$ 没有极值点，但曲线 $y=f(x)$ 有拐点，则 a 的取值范围是【　　】

（A）$[0,1)$　　（B）$[1,+\infty)$　　（C）$[1,2)$　　（D）$[2,+\infty)$.

【答案】C.

【解析】

$f'(x)=2xe^{x}+\left(x^{2}+a\right)e^{x}=\left(2x+x^{2}+a\right)e^{x}$

$f(x)$没有极值点　　.

$\Delta=4-4a\geq \quad a\geq 1$

$f''(x)=(2+2x)e^{x}+\left(2x+x^{2}+9\right)e^{x}$

$=\left(2+a+4x+x^{2}\right)e^{x}$

曲线$f(x)$有拐点

$\Delta=16-4(2+a)=8-49>0, a<2$

所以$1\leq a<2$

选C.

（8）设 A,B 为 n 阶可逆矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，M^{*} 为矩阵 M 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^{*}=$

A. $\begin{pmatrix} |A|B^{*} & -B^{*}A^{*} \\ O & |B|A^{*} \end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix} |A|B^{*} & -A^{*}B^{*} \\ O & |B|A^{*} \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} |B|A^{*} & -B^{*}A^{*} \\ O & |A|B^{*} \end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix} |B|A^{*} & -A^{*}B^{*} \\ O & |A|B^{*} \end{pmatrix}$.

【答案】D.

【解析】$\begin{pmatrix} A & E \\ & B \end{pmatrix}^{*}=|A|\cdot|B|\cdot\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}EB^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B|A^{*} & -A^{*}B^{*} \\ & |A|B^{*} \end{pmatrix}$,选$D$.

（9）二次型 $f\left(x_{1},x_{2},x_{3}\right)=\left(x_{1}+x_{2}\right)^{2}+\left(x_{1}+x_{3}\right)^{2}-4\left(x_{2}-x_{3}\right)^{2}$ 的规范形为

A. $y_{1}^{2}+y_{2}^{2}$.　　B. $y_{1}^{2}-y_{2}^{2}$.

C. $y_{1}^{2}+y_{2}^{2}-4y_{3}^{2}$.　　D. $y_{1}^{2}+y_{2}^{2}-y_{3}^{2}$.

【答案】B.

【解析】

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_1+x_3\right)^2-4\left(x_2-x_3\right)^2$$
$$=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1^2+x_3^2+2x_1x_3-4x_2^2-4x_3^2+8x_2x_3$$
$$=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_2x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$$
$$=\left[x_1,x_2,x_3\right]\begin{bmatrix}2&1&1\\1&-3&4\\1&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&-3-\lambda&4\\+1&4&-3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&-3-\lambda&4\\0&\lambda+7&-7-\lambda\end{vmatrix}\cdots$$
$$=\begin{vmatrix}2-1&2&1\\1&1-\lambda&4\\0&0&-7-\lambda\end{vmatrix}=(-7-\lambda)\left(x^2-3\lambda+2-2\right)$$
$$=(-7-\lambda)(\lambda-3)\lambda=0$$
$$\lambda_1=0,\lambda=3,\lambda_3=-7$$

规范性为： $y_1^2-y_2^2$.选 B .

（10）已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.若$\gamma$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，也可由$\beta_1,\beta_2$线性表示，则$\gamma=$

A. $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$.

B. $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$.

C. $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$.

D. $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$.

【答案】D.

【解析】

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\0&-3&-1&2\\0&-5&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\0&-3&-1&2\\0&-3&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\0&1&1&0\\0&-3&-1&2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\0&1&1&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3l+2l \\ -6l+l \\ -3l+l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l \\ -5l \\ -8l \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in R.$$

选 D.

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小，则 $ab =$____________.

【答案】$ab = -2.$

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+\ln a(x)}{e^{x^2}-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x+o(x^n)}{1+x^2+\frac{1}{2}\left(x^4\right)+ax^2\Big)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{9}x^4++x^4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x+\left(b-\frac{1}{2}\right)x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{3}{2}x^2+0\left(x^2\right)}$$

$a+1=0 \quad a=-1, b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad b=2,$

$ab=-2.$

（12）曲线 $y = \int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的弧长为____________.

【答案】$\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$

【解析】$y' = \sqrt{3-x^2}, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$

$$S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-y'^2}\,d = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+3-x^2}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

令 $x = 2\sin u$

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos u \cdot d\,2\sin u = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 u\,du = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos u\,du$$

$$= 8\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2u}{2}du = 8\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

（13）设函数 $z=z(x,y)$ 由 $e^{z}+xz=2x-y$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$____________.

【答案】$-\dfrac{3}{2}$.

【解析】

$z(1.1)=0$

$e^{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+z+x\dfrac{\partial z}{\partial x}=2-0=2$

$\left(e^{z}+x\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}=2-z\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\left.\dfrac{2-z}{e^{z}+x}\right|_{(1,1)}=\dfrac{2}{2}=1$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{-\left(e^{z}+x\right)-(2-z)\left(e^{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+1\right)}{\left(e^{z}+x\right)^2}\right|_{(1,1)}=\frac{-2-2(1+1)=}{4}=-\frac{3}{2}$$

（14）曲线 $3x^3=y^5+2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为____________.

【答案】$-\dfrac{11}{9}$.

【解析】

$9x^2=5y^4\cdot y'+6y^2y'\Rightarrow x=1\quad 3=y^5+2y^3\quad y=1$ $\cdots$

$9=5y'+6y'\quad y'=\dfrac{9}{11}$

$k_{\text{法线}}=-\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{11}{9}$.

（15）设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$___.

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【解析】

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x+2)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1[f(x)+x]dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xdx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 xdx=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

（16）已知线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\ x_1+ax_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ ax_1+bx_2=2\end{cases}$ 有解，其中 a,b 为常数。若 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

【答案】8.

【解析】

$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$$ 方程组有解

$r(A) = r(A,b) \le 3 < 4, |A,b| = 0$

$$|A,b| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \times 4 = 0,$$

所以 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 8.$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设曲线 $L: y = y(x)(x > e)$ 经过点 $(e^2, 0)$， L 上任一点 $P(xy)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

（1）求 $y(x)$；

（2）在 L 上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积.

【解析】（I）曲线 L 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$，令 $X = 0$，

则切线在 y 轴上的截距为 $Y = y - xy'$，则 $x = y - xy'$，即 $y' - \frac{1}{x} y = -1$，解得

$y(x) = x(C - \ln x)$，其中 C 为任意常数.

又 $y(e^2) = 0$，则 $C = 2$，故 $y(x) = x(2 - \ln x)$.

（II）设曲线 L 在点 $(x, x(2 - \ln x))$ 处的切线与两坐标轴所围三角形面积最小，

此时切线方程为

$$Y-x(2-\ln x)=(1-\ln x)(X-x).$$

令 $Y=0$，则 $X=\dfrac{x}{\ln x-1}$；令 $X=0$，则 $Y=x$.

故切线与两坐标轴所围三角形面积为 $S(x)=\dfrac{1}{2}XY=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{\ln x-1}\cdot x=\dfrac{x^2}{2(\ln x-1)}$，

则 $S'(x)=\dfrac{x(2\ln x-3)}{2(\ln x-1)^2}$.令 $S'(x)=0$，得驻点 $x=e^{\frac{3}{2}}$.

当 $e<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$S'(x)<0$；当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$S'(x)>0$，故 $S(x)$ 在 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 处取得极小值，同时也取最小值，且最小值为 $S(e^{\frac{3}{2}})=e^3$.

（18）（本题满分 12 分）

求函数 $f\left(xy\right)=xe^{\cos y}+\dfrac{x^2}{2}$ 的极值.

【解析】$\begin{cases} f'_x=e^{\cos y}+x=0 \\ f'_y=xe^{\cos y}(-\sin y)=0 \end{cases}$，

得驻点为：$\left(-e^{-1},k\pi\right)$，其中 k 为奇数;$(-e,k\pi)$，其中 k 为偶数.

则 $\begin{cases} f''_{xx}=1 \\ f''_{xy}=e^{\cos y}(-\sin y) \\ f''_{yy}=xe^{\cos y}\sin^2 y+xe^{\cos y}(-\cos y) \end{cases}$

代入 $\left(-e^{-1},k\pi\right)$，其中 k 为奇数，得 $\begin{cases} A=f''_{xx}=1 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=-e^{-2} \end{cases}$，$AC-B^2<0$，

故 $\left(-e^{-1},k\pi\right)$ 不是极值点；

代入 $(-e,k\pi)$，其中 k 为偶数，得 $\begin{cases} A=f''_{xx}=1 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=-e^{-2} \end{cases}$，$AC-B^2>0$ 且 $A>0$，

故 $(-e,k\pi)$ 是极小值点，$f(-e,k\pi)=-\dfrac{e^2}{2}$ 为极小值.

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge 1\right\}$.

（1）求 D 的面积；

（2）求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】(I）由题设条件可知：

$$S=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx\overset{\sqrt{1+x^2}=t}{=}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{t}{\left(t^2-1\right)t}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty}=\ln(\sqrt{2}+1);$$

(II）旋转体体积

$$V=\int_1^{+\infty}\pi y^2dx=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)^2}dx=\pi\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]dx=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

（20）（本题满分 12 分）

设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $x^2+y^2-xy=1$， $x^2+y^2-xy=2$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$， $y=0$ 围成，计算 $\iint\limits_D\dfrac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】本题目采用极坐标进行计算

$$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{1}{r^2\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}rd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{1}{\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\frac{1}{r}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\cdot\ln r\Bigg|_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\ln\sqrt{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3+\tan^2\theta\right)\cdot\cos^2\theta}d\theta=\ln 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(3+\tan^2\theta\right)}d\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\ln 2.$$

（21）（**本题满分 12 分**）

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数．证明:

（1）若 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

（2）若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$，使得 $\left|f''(\eta)\right|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$．

【解析】（Ⅰ）证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$，$\eta$ 介于 0 与 x 之间，则 $f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2$，$0<\eta_1<a$ ①

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2$，$-a<\eta_2<0$ ②

①+②得：$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}\left[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right]$ ③

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2,\eta_1]$ 上连续，则必有最大值 M 与最小值 m，即

$m\le f''(\eta_1)\le M;m\le f''(\eta_2)\le M$；从而 $m\le\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\le M$；

由介值定理得：存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$，有 $\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$，代入③得：

$f(a)+f(-a)=a^2f''(\xi)$，$f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$

（Ⅱ）证明：设 $f(x)$ 在 $x=x_0\in(-a,a)$ 取极值，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$．

又 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\gamma_1)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2$，$\gamma$ 介于 0 与 x 之间，则 $f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2$，$-a<\gamma_1<0$

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2$，$0<\gamma_2<a$

从而 $\left|f(a)-f(-a)\right|=\left|\frac{1}{2}(a-x_0)^2f''(\gamma_2)-\frac{1}{2}(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$

$$\le \frac{1}{2}\left|(a-x_0)^2 f''(\gamma_2)\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}(a+x_0)^2 f''(\gamma_1)\right|$$

又$\left|f''(x)\right|$连续，设$M=\max\left\{\left|f''(\gamma_1)\right|,\right\}\left|f''(\gamma_2)\right|$，则

$\left|f(a)-f(-a)\right| \le \frac{1}{2}M(a+x_0)^2+\frac{1}{2}M(a-x_0)^2 = M\left(a^2+x_0{}^2\right)$

又$x_0\in(-a,a)$，则$\left|f(a)-f(-a)\right|\le M\left(a^2+x_0{}^2\right)\le 2Ma^2$，则$M\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$，

即存在$\eta=\gamma_1$或$\eta=\gamma_2\in(-a,a)$，有

$$\left|f^*(\eta)\right|\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|.$$

（22）（**本题满分** 12 **分**）

设矩阵 A 满足:对任意 x_1,x_2,x_3，均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$

（1）求 A.

（2）求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

【解析】

（Ⅰ）因为 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$对任意的$x_1,x_2,x_3$均成立，

所以 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

（Ⅱ）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda&-2-\lambda\\0&-1&2+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda&0\\0&-1&2+\lambda\end{vmatrix}$

$=(2+\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$

所以 A 的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$.

$\lambda_1=-2$时，$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1\\-2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量$\alpha_1=(0,-1,1)^T$；

$\lambda_2=2$时，$\lambda_2 E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量$\alpha_2=(4,3,1)^T$；

$\lambda_3=-1$时，$\lambda_3 E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得特征向量$\alpha_3=(1,0,-2)^T$；

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&4&1\\-1&3&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.