2023 年全国硕士研究生招生考试

数学一 试题及解析

考试时间：180 分钟，试卷总分：150 分

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将答案写在答题纸指定位置上.

1.曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x-1})$ 的斜渐近线为（　　）

（A）$y=x+e$　　（B）$y=x+\dfrac{1}{e}$

（C）$y=x$　　（D）$y=x-\dfrac{1}{e}$

【答案】B.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)=1$.

$$\lim_{x\to\infty}y-x=\lim_{x\to 0}x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-x=\lim_{x\to\infty}x\left(\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{(x-1)e}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(x-1)e}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)e}=\frac{1}{e}$$

$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.选 B.

2.若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则（　　）

（A）$a<0,b>0$　　（B）$a>0,b>0$

（C）$a=0,b>0$　　（D）$a=0,b<0$

【答案】C.

【解析】二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 特征方程为：$\lambda^2+a\lambda+b=0$

①当 $\Delta=a^2-4b>0$ 时，设其两不同特征值为 λ_1,λ_2，则其通解结构为：$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

不管 λ_1,λ_2 的正负如何，其在 $x\to\infty$ 时，$y(x)\to\infty$，其必然为无界函数.舍去.

②当 $\Delta=a^2-4b=0$ 时，设其两相同特征值为 $\lambda_1=\lambda_2$，则其通解结构为 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$.

不管λ_1,λ_2的正负如何，其在$x\to\infty$时，$y(x)\to\infty$，其必然为无界函数.舍去.

③当$\Delta=a^2-4b<0$.时，设其两特征值为$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则其通解结构为

$$y(x)=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right).$$

若$\alpha\neq 0$，则$x\to\infty$时，$y(x)=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right)$为无界函数，从而$\alpha=0$

即当$\alpha=0$时，$y(x)=C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x$为有界函数.

此时$\Delta=a^2-4b<0$，即$a=0,\ b>0$，故选（C）.

3. 设函数$y=f(x)$由$\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$确定，则（　　）

（A）$f(x)$连续，$f'(0)$不存在.
（B）$f'(0)$存在，$f'(x)$ 在$x=0$处不连续.
（C）$f'(x)$连续，$f''(0)$不存在.
（D）$f''(0)$存在，$f''(x)$在$x=0$处不连续.

【答案】C.

【解析】由参数方程可得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}, & x\ge 0\\ -x\sin x, & x<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0=f(0)$，$f(x)$在$x=0$处连续.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{9}\cos\dfrac{x}{3},x\ge 0\\ -\sin x-x\cos x,x<0\end{cases},$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=0=f'(0)$，$f'(x)$在$x=0$处连续.

$$f_+''(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}}{x}=\frac{2}{9};$$

$$f_-''(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x-x\cos x}{x}=-2$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f''(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f''(x)$，$f''(x)$在$x=0$处不可导，选C.

4.已知$a_n<b_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛的（　　）

（A）充要条件　　　　（B）充分不必要

（C）必要不充分　　　　（D）既不必要也不充分

【答案】A.

【解析】

由条件可知$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$为收敛的正项级数，进而绝对收敛；

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则由$|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|$与比较，得$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛；

设$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，则由$|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\le|a_n-b_n|+|b_n|$与比较，得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛；

故为充要条件。

5. 已知 n 阶矩阵，A,B,C 满足 $ABC=O$, E 为 n 阶单位矩阵．记矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix},\begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$的秩分别为$r_1,r_2,r_3$,则

(A) $r_1\le r_2\le r_3$

(B) $r_1\le r_3\le r_2$

(C) $r_3\le r_1\le r_2$

(D) $r_2\le r_1\le r_3$

【答案】B.

【解析】

因为初等变换不改变矩阵的秩.故

$$r_1=r\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} -ABC & O \\ BC & E \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} O & O \\ BC & E \end{pmatrix}=n$$

$$r_2=r\begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} AB & O \\ O & E \end{pmatrix}=n+r(AB)$$

$$r_3=r\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} E & O \\ O & -ABAB \end{pmatrix}=n+r(ABAB)$$

又因为$r(ABAB)\le r(AB)$故 B 正确.

6.下列矩阵不能相似于对角矩阵的是

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】D.

【解析】

选项 A 为上三角矩阵，特征值为主对角元素且 3 个特征值互不相同，故可相似对角化。

选项 B 为实对称矩阵，故可相似对角化

选项 C 的特征值为 $1,2,2$，二重特征值 2 的特征向量的基础解系含解向量个数为 $2=3-r(C-2E)$ 所以可相似对角化.

故选 D.

7. 已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.若 γ 既可由 α_1,α_2 线性表示，也可由 β_1,β_2 线性表示，则 $\gamma=$

（A） $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$.　　（B） $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$.

（C） $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$.　　（D） $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$.

【答案】（D）.

【解析】

解析：由题意可知：设存在常数 k_1,k_2,t_1,t_2 使得:

$$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2;\gamma=t_1\beta_1+t_2\beta_2$$

即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=t_1\beta_1+t_2\beta_2$，可得：$\begin{cases}k_1+2k_2=2t_1+t_2;\\2k_1+k_2=5t_1+0\cdot t_2;\\3k_1+k_2=9t_1+t_2;\end{cases}$

解得：$k_1=-3k_2$.

即 $\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-3k_2\alpha_1+k_2\alpha_2=k_2\begin{bmatrix}-1\\-5\\-8\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in R$，选（D）.

8. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E\left(\left|X-EX\right|\right)=$（　　）

（A） $\dfrac{1}{e}$　　（B） $\dfrac{1}{2}$　　（C） $\dfrac{2}{e}$　　（D） 1

【答案】（C）.

【解析】

由 $X \sim P(1)$，知：$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\dfrac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots,)$，$EX=1$

则

$$E(|X-EX|)=\sum_{k=0}^{+\infty}|x_k-EX|P_k=|0-1|\cdot e^{-1}+|1-1|\cdot e^{-1}+|2-1|\cdot\frac{e^{-1}}{2!}+\cdots+(k-1)\frac{1}{k!}e^{-1}+\cdots$$

$$=e^{-1}+e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot\frac{1}{k!}$$

$$=e^{-1}+e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}-e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$=e^{-1}+e^{-1}(e-1)-e^{-1}(e-1-1)$$

$$=\frac{2}{e}$$

选（C）.

9.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自总体 $N(\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，其两样本之间相互独立，记

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\ S_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\ S_2^2=\dfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$ 则（ ）

（A）$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　（B）$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

（C）$\dfrac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　（D）$\dfrac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

【答案】（D）.

【解析】：由 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 知：

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1);\frac{(m-1)S_1^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1);$$

又两样本之间相互独立，故

$$\frac{2S_1^2}{S_2^2}=\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\Big/n-1}{\frac{(m-1)S_1^2}{2\sigma^2}\Big/m-1}\sim F(n-1,m-1).$$

选（D）.

10. 设 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma(\sigma>0)$ 是未知参数，记 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$，若 $E(\hat{\sigma})=\sigma$，则 $a=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　（C）$\sqrt{\pi}$　　（D）$\sqrt{2\pi}$

【答案】（A）.

【解析】：因为 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，故 $\left(X_1-X_2\right)\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$.

令 $Y=X_1-X_2$，则随机变量 Y 的概率密度为：

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}},-\infty<y<+\infty$$

则

$$E(\hat{\sigma})=a\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{a}{\sqrt{\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=-\frac{2a\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}d\left(-\frac{y^2}{4\sigma^2}\right)=\frac{2a\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

因 $E(\hat{\sigma})=\sigma$，则 $a=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，选（A）.

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$____________.

【答案】$ab=-2$.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)}{1+x^2+\frac{1}{2}\left(x^4\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}x^4\right)+o(x^4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x+\left(b-\frac{1}{2}\right)x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}$$

$a+1=0\quad a=-1,b-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\quad b=2,$

$ab=-2.$

12.曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为____________.

【答案】 $x+2y-z=0$

【解析】 $F(x,y,z)=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)-z.$

$$\vec{n}=(F_x',F_y',F_z')=(1+\frac{2x}{1+x^2+y^2},2+\frac{2y}{1+x^2+y^2},-1)$$

故在点 $(0,0,0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(1,2,-1)$ 即切平面方程为 $x+2y-z=0$.

13.设 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，且 $f(x)=1-x,\ x\in[0,1]$,若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$____________.

【答案】 0

【解析】 $a_n=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi xdx=2\left(\int_0^1\cos n\pi xdx-\int_0^1 x\cos n\pi xdx\right)$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd(\sin n\pi x)$$

$$=\frac{-2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1),$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\dfrac{-1}{2n^2\pi^2}(\cos 2n\pi-1)=0$

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则

$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$____________.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x+2)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1[f(x)+x]dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xdx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 xdx=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

15. 已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$. 若 $\gamma^T\alpha_i=\beta^T\alpha_i(i=1,2,3)$, 则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$________.

【答案】$\frac{11}{9}$.

【解析】

$\gamma^T\alpha_1=\beta^T\alpha_1=1\Rightarrow k_1\alpha_1^T\alpha_1+k_2\alpha_2^T\alpha_2+k_3\alpha_3^T\alpha_3=1\Rightarrow k_1=\frac{1}{3}$

同理可得 $k_2=-1,k_3=-\frac{1}{3}$

$k_1^2+k_2^2+k_3^2=\frac{11}{9}$

16.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B(1,\frac{1}{3}),Y\sim B(2,\frac{1}{2})$ 则 $P\{X=Y\}=$_______.

【答案】$\frac{1}{3}$.

【解析】

因为 $X\sim B(1,\frac{1}{3}),Y\sim B(2,\frac{1}{2})$ 所以 X 取值为 $0,1$, Y 的取值为 $0,1,2$

又因为 X 与 Y 相互独立,所以

$P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}$

$=\frac{2}{3}C_2^0(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}C_2^1(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{3}$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,2)$，该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

（1） 求 $y(x)$;

（2） 求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

（1）曲线 L 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，

则切线在 y 轴上的截距为 $Y=y-xy'$，则 $x=y-xy'$，即 $y'-\frac{1}{x}y=-1$，解得

$y(x)=x(C-\ln x)$，其中 C 为任意常数.

又 $y(1)=2$，则 $C=2$，故 $y(x)=x(2-\ln x)$.

（2）由（1）可知，$f(x)=\int_1^x t(2-\ln t)dt$，故 $f'(x)=x(2-\ln x)=0$.则驻点为 $x=e^2$.

当 $0<x<e^2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e^2$ 时，$f'(x)<0$ 故 $f(x)$ 在 $x=e^2$ 处取得极大值，同时也是最大值，且最大值为 $f(e^2)=\frac{1}{4}e^4-\frac{5}{4}$.

（18）（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

【解析】

$\begin{cases} f_x'=-2(2y+3xy-5x^3)=0, \\ f_y'=2y-x^2-x^3=0 \end{cases}$ 得驻点为 $(0,0),(1,1),(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$

$$\begin{cases} f_{xx}''=-(2y+3xy-5x^3)-x(3y-15x^2) \\ f_{xy}''=-2x-3x^2 \\ f_{yy}''=2. \end{cases}$$

代入点 $(0,0)$ 可得 $\begin{cases} A=0, \\ B=0, \\ C=2. \end{cases}$ 则 $AC-B^2=0$ 判别法失效，故当 $x\to 0$ 时，取 $y=x^2+kx^3$ 可得 $f(x,y)=kx^5$ 故附近值既有大于 0 也有小于 0 。因此 $(0,0)$ 不是极值点

代入点 $(1,1)$ 可得 $\begin{cases} A=12, \\ B=-5, \\ C=2. \end{cases}$ 则 $AC-B^2<0$ 故 $(1,1)$ 不是极值点

代入点 $(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$ 可得 $\begin{cases} A=\frac{100}{27}, \\ B=-\frac{8}{3}, \\ C=2. \end{cases}$ 则 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$ 故 $(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$ 是极小值点.故

$f(\frac{2}{3},\frac{10}{27})=-\frac{4}{729}$ 为极小值.

（19）（本题满分 12 分）

设空间有界区域Ω由柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=0$和$x+z=1$围成. Σ为Ω的边界曲面的外侧.计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy.$$

【解析】

由高斯公式可得：

$$I=\iint_{\Sigma}2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy=\iiint_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)dV$$

由对称性知$\iiint_{\Omega}(xz\sin y+3y\sin x)dV=0$，则

$$I=\iiint_{\Omega}2zdV=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x}2zdz=\iint_{D_{xy}}(1-x)^2dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(1-2x+x^2)dxdy=\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{5\pi}{4}$$

（20）（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有2阶连续导数. 证明:

（1）若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（2）若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

【解析】

【解析】（Ⅰ）证明：由泰勒中值定理

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$$，η介于 0 与x之间，则

$$f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2,\quad 0<\eta_1<a\text{①}$$

$$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2,\quad -a<\eta_2<0\text{②}$$

①+②得：$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}\left[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right]$③

又$f''(x)$在$[\eta_2,\eta_1]$上连续，则必有最大值M与最小值m，即

$m \le f''(\eta_1) \le M; m \le f''(\eta_2) \le M$；从而 $m \le \dfrac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2} \le M$；

由介值定理得：存在 $\xi \in [\eta_2,\eta_1] \subset (-a,a)$，有 $\dfrac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2} = f''(\xi)$，代入③得：

$f(a)+f(-a)=a^2 f''(\xi)$，$f''(\xi)=\dfrac{f(a)+f(-a)}{a^2}$

（II）证明：设 $f(x)$ 在 $x=x_0 \in (-a,a)$ 取极值，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$.

又 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2 = f(x_0)+\dfrac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2$，$\gamma$ 介于

0 与 x 之间，则 $f(-a)=f(x_0)+\dfrac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2$，$-a<\gamma_1<0$

$f(a)=f(x_0)+\dfrac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2$，$0<\gamma_2<a$

从而 $|f(a)-f(-a)| = \left|\dfrac{1}{2}(a-x_0)^2 f''(\gamma_2) - \dfrac{1}{2}(a+x_0)^2 f''(\gamma_1)\right|$

$$\le \frac{1}{2}\left|(a-x_0)^2 f''(\gamma_2)\right| + \frac{1}{2}\left|(a+x_0)^2 f''(\gamma_1)\right|$$

又 $|f''(x)|$ 连续，设 $M=\max\{|f''(\gamma_1)|,|f''(\gamma_2)|\}$，则

$|f(a)-f(-a)| \le \dfrac{1}{2}M(a+x_0)^2 + \dfrac{1}{2}M(a-x_0)^2 \le M(a^2+x_0^2)$

又 $x_0 \in (-a,a)$，则 $|f(a)-f(-a)| \le M(a^2+x_0^2) \le 2Ma^2$，则 $M \ge \dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$，

即存在 $\eta=\gamma_1$ 或 $\eta=\gamma_2 \in (-a,a)$，有

$$|f''(\eta)| \ge \frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

（21）（本题满分 12 分）
已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$；

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$.

（1） 求可逆变换 $x=Py$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成 $g(y_1,y_2,y_3)$

（2） 是否存在正交变换 $x=Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成 $g(y_1,y_2,y_3)$

【解析】

（1）利用配方法将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为规范形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2$$

令 $\begin{cases} z_1=x_1+x_2-x_3 \\ z_2=x_2+x_3 \\ z_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1{}^2+z_2{}^2$

再将 $g(y_1,y_2,y_3)$ 化为规范形

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3=y_1{}^2+(y_2+y_3)^2$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=y_2+y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 则 $g(y_1,y_2,y_3)=z_1{}^2+z_2{}^2$

即 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 使得 $g(y_1,y_2,y_3)=z_1{}^2+z_2{}^2$

从而有 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

于是可得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 其中 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为所求矩阵，

可将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成 $g(y_1,y_2,y_3)$

（2）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$. 的矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

若存在正交变换 $x=Qy$，使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=B$ 可得 A 与 B 相似.

但有 $tr(A)=5.\ tr(B)=3$ 故 A 与 B 不相似，因此不存在正交变换 $x=Qy$ 使得 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成 $g(y_1,y_2,y_3)$.

（22）（本题满分 12 分）

设二维随机变量 (x,y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\le 1\\ 0. & \text{其他}\end{cases}$$

（1） 求 X 与 Y 的协方差;

（2） 求 X 与 Y 是否相互独立;

（3） 求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率密度.

【解析】

（1）$Cov(X,Y)=E(XY)-E(XY)E(XY)$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

所以 $Cov(X,Y)=0$.

（2）当 $-1<x<1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{\pi}[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]$$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}[x^2\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}], & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

同理可得 $\therefore f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}[\mathrm{y}^2\sqrt{1-y^2}+\dfrac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}], & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，X 与 Y 不相互独立;

（3） $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z\}$

$z<0$时，$F_Z(z)=0$;

$0\le z<1$时，$F_Z(z)=P\{X^2+Y^2\le z\}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{2}{\pi}r^3dr=z^2$;

$z\ge 1$时，$F_Z(z)=1$.

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$