2023年全国硕士研究生招生考试

数学三 试题及解析

考试时间：180分钟，试卷总分：150分

一、选择题：1~10小题，每小题5分，共50分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将答案写在答题纸指定位置上.

（1） 已知函数 $f(x,y)=\ln\left(y+|x\sin y|\right)$ 则 【 】

（A）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在　（B）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在

（C）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在　（D）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在

答案：（A）

解析：由偏导数定义：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+|x\sin 1|\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x\sin 1|}{x}=\sin 1\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},$$

不存在.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y-0}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y-1}=1$$，存在，选（A）.

（2） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},x\le 0\\(x+1)\cos x,x>0\end{cases}$ 的一个原函数为 【 】

（A）$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x),x\le 0\\(x+1)\cos x-\sin x,x>0\end{cases}$　（B）$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1,x\le 0\\(x+1)\cos x-\sin x,x>0\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x),x\le 0\\(x+1)\sin x+\cos x,x>0\end{cases}$　（D）$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1,x\le 0\\(x+1)\sin x+\cos x,x>0\end{cases}$

答案：（D）.

解析：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},x\le 0\\(x+1)\cos x,x>0\end{cases}$ 的原函数为：

$$F(x)=\begin{cases}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx, x\le 0\\ \int (x+1)\cos x dx, x>0\end{cases}$$

即 $F(x)=\begin{cases}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\mathrm{C}_1, x\le 0\\ (x+1)\sin x+\cos x+C_2, x>0\end{cases}$

由原函数的连续性知：$F(0-0)=F(0+0)$，得$C_1=C_2+1$，取$C_2=0$，则$C_1=1$

答案应选（D）.

（3）已知 $y''+ay'+by=0$ 的解在$(-\infty,+\infty)$内有界，则　　　　　　　　　　【　】

（A）$a>0,b<0$　　　　　　　　　　（B）$a<0,b>0$

（C）$a=0,b>0$　　　　　　　　　　（D）$a=0,b<0$

答案：（C）

解析：二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程为：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

①当 $\Delta=a^2-4b>0$ 时，设其两不同特征值为 λ_1,λ_2，则其通解结构为：

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}.$$

不管 λ_1,λ_2 的正负如何，其在 $x\to\infty$ 时，$y(x)\to\infty$，其必然为无界函数.舍去.

②当 $\Delta=a^2-4b=0$ 时，设其两相同特征值为 $\lambda_1=\lambda_2$，则其通解结构为

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}.$$

不管 λ_1,λ_2 的正负如何，其在 $x\to\infty$ 时，$y(x)\to\infty$，其必然为无界函数.舍去.

③当 $\Delta=a^2-4b<0$ 时，设其两特征值为 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则其通解结构为

$$y(x)=e^{\alpha x}\left[C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right].$$

若 $\alpha\ne 0$，则 $x\to\infty$ 时，$y(x)=e^{\alpha x}\left[C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right]$ 为无界函数，

当 $\alpha=0$ 时，$y(x)=C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x$ 为有界函数,此时 $a=0,-4b<0$，满足题意.

综上，$a=0,b>0$ 时，$y''+ay'+by=0$ 的解在$(-\infty,+\infty)$内有界故选（C）.

（4）已知 $a_n<b_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛是 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛的

【　】

（A）充要条件　　（B）充分不必要

（C）必要不充分　　（D）既不必要也不充分

答案：（A）

解析：由条件可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 为收敛的正项级数，进而绝对收敛；

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则由 $|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|$ 与比较判别法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛；

设 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则由 $|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\le|a_n-b_n|+|b_n|$ 与比较判别法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛；故为充要条件，答案应选 A。

（5）设 A,B 为可逆矩阵，E 为单位阵，M^* 为 M 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix}A&E\\O&B\end{pmatrix}^*=$　【　】

（A）$\begin{pmatrix}|A|B^*&-B^*A^*\\O&|B|A^*\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}|B|A^*&-A^*B^*\\O&|A|B^*\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}|B|A^*&-B^*A^*\\O&|A|B^*\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}|A|B^*&-A^*B^*\\O&|B|A^*\end{pmatrix}$

答案：（B）.

解析：由拉普拉斯行列式值：$\begin{vmatrix}A&E\\O&B\end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$.

故 $\begin{pmatrix}A&E\\O&B\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}A&E\\O&B\end{pmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}A&E\\O&B\end{vmatrix}$

$$\begin{bmatrix}A&E&E&O\\O&B&O&E\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A&E&E&O\\O&E&O&B^{-1}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A&O&E&-B^{-1}\\O&E&O&B^{-1}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}E&O&A^{-1}&-A^{-1}B^{-1}\\O&E&O&B^{-1}\end{bmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix}A&E\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&-A^{-1}B^{-1}\\O&B^{-1}\end{bmatrix}$

则 $\begin{pmatrix}A&E\\O&B\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}A&E\\O&B\end{pmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}A&E\\O&B\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-1}&-A^{-1}B^{-1}\\O&B^{-1}\end{bmatrix}\cdot|A|\cdot|B|=\begin{bmatrix}|B|A^*&-A^*B^*\\O&|A|B^*\end{bmatrix}$

选（B）.

（6）$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为 【 】.

（A）$y_1^2+y_2^2$ （B）$y_1^2-y_2^2$ （C）$y_1^2+y_2^2-4y_3^2$ （D）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

答案：（B）.

解析：方法一：作线性变换：

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2; \\ y_2=x_1-x_2; \\ y_3=x_3 \end{cases}$$

则原二次型为：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx\xrightarrow{x=Cy}y_1{}^2+y_2{}^2-4\left(y_1-y_2\right)^2=-3\left(y_1-\frac{4}{3}y_2\right)^2+\frac{7}{3}y_2{}^2$$

其标准形为：$y_1^2-y_2^2$.

方法二：

$$\begin{aligned} &f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_1+x_3\right)^2-4\left(x_2-x_3\right)^2 \\ &=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1^2+x_3^2+2x_1x_3-4x_2^2-4x_3^2+8x_2x_3 \\ &=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_2x_2+2x_1x_3+8x_2x_3 \\ &=\left[x_1,x_2,x_3\right]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ +1 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & \lambda+7 & -7-\lambda \end{vmatrix}\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} 2-1 & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -7-\lambda \end{vmatrix}=(-7-\lambda)\left(x^2-3\lambda+2-2\right)$$

$$=(-7-\lambda)(\lambda-3)\lambda=0$$

$$\lambda_1=0,\lambda=3,\lambda_3=-7$$

规范性为：$y_1^2-y_2^2$.选 B.

（7）$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\gamma$ 均可由 α_1,α_2 表示，也可由 β_1,β_2 表示，则 $\gamma=$【 】.

（A）$k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$ （B）$k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$ （C）$k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$ （D）$k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

答案：（D）.

解析：由题意可知：设存在常数 k_1,k_2,t_1,t_2 使得:

$$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2;\gamma=t_1\beta_1+t_2\beta_2$$

即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=t_1\beta_1+t_2\beta_2$，可得：$\begin{cases}k_1+2k_2=2t_1+t_2;\\2k_1+k_2=5t_1+0\cdot t_2;\\3k_1+k_2=9t_1+t_2;\end{cases}$

解得：$k_1=-3k_2$.

即 $\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-3k_2\alpha_1+k_2\alpha_2=k_2\begin{bmatrix}-1\\-5\\-8\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in R$，选（D）.

（8） 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E\left(|X-EX|\right)=$【 】

（A）$\frac{1}{e}$ （B）$\frac{1}{2}$ （C）$\frac{2}{e}$ （D）1

答案：（C）.

解析：由 $X\sim P(1)$，知：$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots,)$，$EX=1$

则

$$E\left(|X-EX|\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}|x_k-EX|P_k=|0-1|\cdot e^{-1}+|1-1|\cdot e^{-1}+|2-1|\cdot\frac{e^{-1}}{2!}+\cdots+(k-1)\frac{1}{k!}e^{-1}+\cdots$$

$$=e^{-1}+e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot\frac{1}{k!}$$

$$=e^{-1}+e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}-e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$=e^{-1}+e^{-1}(e-1)-e^{-1}(e-1-1)$$

$$=\frac{2}{e}$$

选（C）.

（9）设 $X_1,X_2,\cdots$，X_n 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots$，Y_m 来自总体

$N\left(\mu,2\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其两样本之间相互独立，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，$S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$ 则

【　】

（A）$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　（B）$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

（C）$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　（D）$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

答案：（D）.

解析：由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 知：

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1);\frac{(m-1)S_1^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1);$$

又两样本之间相互独立，故

$$\frac{2S_1^2}{S_2^2}=\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\Big/n-1}{\frac{(m-1)S_1^2}{2\sigma^2}\Big/m-1}\sim F(n-1,m-1).$$

选（D）.

（10）设 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma(\sigma>0)$ 是未知参数，记 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$，若 $E(\hat{\sigma})=\sigma$，则 $a=$　　【　】

（A）$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　（C）$\sqrt{\pi}$　　（D）$\sqrt{2\pi}$

答案：（A）.

解析：因为 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，故 $\left(X_1-X_2\right)\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$.

令 $Y=X_1-X_2$，则随机变量 Y 的概率密度为：

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}},-\infty<y<+\infty$$

则

$$E\left(\hat{\sigma}\right)=a\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{a}{\sqrt{\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=-\frac{2a\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}d\left(-\frac{y^2}{4\sigma^2}\right)=\frac{2a\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

因 $E\left(\hat{\sigma}\right)=\sigma$，则 $a=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，选（A）.

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)=$________.

答案：$\dfrac{2}{3}$.

解析：

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left(2-\frac{1}{t}\sin t-\cos t\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t+t(1-\cos t)}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}+\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}$$

$$=\frac{2}{3}$$

（12）已知函数 $f(x,y)$ 满足 $df(x,y)=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2},f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$，则 $f\left(\sqrt{3},3\right)=$________.

答案：$\dfrac{\pi}{3}$.

解析：由题意：$df(x,y)=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2},f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$ 知：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

对 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 两端对 y 积分可得：

$f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}+\varphi(x)$，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}+\varphi'(x)=\frac{-y}{x^2+y^2}+\varphi'(x)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$\varphi'(x)=0$，$\varphi(x)=C$

所以，$f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}+C$

又 $f(1,1)=\frac{\pi}{4}$，解得 $C=0$,从而 $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$，

$f\left(\sqrt{3},3\right)=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

（13）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$ ________.

答案：$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

解析：方法一：由麦克劳林级数：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

则：$e^x+e^{-x}=2\left[1+0+\frac{x^2}{2}+0\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right]=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

方法二：设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，

则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，$S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=S(x)$

解微分方程得通解：$S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$，由 $S(0)=1,S'(0)=0$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$，$C_2=\frac{1}{2}$，

故 $S(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

（14）设某公司在 t 时刻的资产为 $f(t)$，从 0 刻到 t 时刻的平均资产为 $\frac{f(t)}{t}-t$，假设 $f(t)$ 为连续函数，且 $f(0)=0$，则 $f(t)=$ ________.

答案：$f(t)=2e^t-2t-2$.

解析：由题意知：$\frac{\int_0^t f(x)dx}{t}=\frac{f(t)}{t}-t$.

即 $\int_0^t f(x)dx=f(t)-t^2$，对该方程两端对 t 求导得：

$$f'(t)-f(t)=2t$$

由一阶线性微分方程的通解结构：

$$f(t)=e^{-\int P(t)dt}\left[\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C\right]$$

$$=e^{-\int -1dt}\left[\int 2te^{\int -1dt}dt+C\right]$$

$$=Ce^{t}-2t-2$$

由 $f(0)=0$ 解得：$C=2$.

即 $f(t)=2e^{t}-2t-2$.

（15）已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_3=1; \\ x_1+ax_2+x_3=0; \\ x_1+2x_2+ax_3=0; \\ ax_1+bx_2=2. \end{cases}$ 有解，其中 a,b 为常数，若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4$，则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$________.

答案：8

解析：

由 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4\neq 0$，和方程组有解知：

$$r\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{pmatrix}=3\text{，从而}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

按第四列展开有：$1\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=0$，所以 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=8$.

（16）已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim B(1,p),Y\sim B(2,p)$，其中 $p\in(0,1)$，则 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为________.

答案：$-\dfrac{1}{3}$

解析：$Cov(X+Y,X-Y)=DX-DY=p(1-p)-2p(1-p)=p(p-1)$.

因为 X,Y 相互独立，所以

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)=3p(1-p)$

从而 $\rho=\dfrac{Cov(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)}\cdot\sqrt{D(X-Y)}}=\dfrac{p(p-1)}{3p(1-p)}=-\dfrac{1}{3}$.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）**（本题满分 10 分）**

已知可导函数 $y=f(x)$，其满足 $ae^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$，且 $y(0)=0,y'(0)=0$.

（1）求 a，b；

（2）判断 $x=0$ 是否为 $y=f(x)$ 的极值点.

解析：

（1）将 $(0,0)$ 代入原式可得 $a+b=0$

将原式对 x 求导：$ae^x+2yy'+y'-\dfrac{1}{1+x}\cos y+\ln(1+x)(\sin y)y'=0$

再将 $y'(0)=0$ 代入上式，得 $a=1$，所以 $b=-1$.

（2） 将 $e^x+2yy'+y'-\dfrac{1}{1+x}\cos y+\ln(1+x)(\sin y)y'=0$ 对 x 求导得：

$$e^x+2(y')^2+2yy''+y''+\frac{1}{(1+x)^2}\cos y+\frac{1}{1+x}\sin y\cdot y'+\frac{1}{1+x}\sin y\cdot y'$$
$$+\ln(1+x)\left[\cos y\cdot(y')^2+\sin y\cdot y''\right]=0$$

将 $x=0,y(0)=0,y'(0)=0$ 代入得 $y''(0)=-2<0$，故 $x=0$ 为极大值点.

（18）**（本题满分 12 分）**

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge1\right\}$.

（1）求 D 的面积；

（2）求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

解析：

（1）

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx\xlongequal{x=\tan t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan t\cdot\sec t}\sec^2 t dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\tan t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc t dt=\ln\left|\csc t-\cot t\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

（2）

$$\int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx=\int_1^{+\infty}\pi\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\int_1^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\pi(1-\frac{\pi}{4}).$$

（19）**（本题满分 12 分）**

已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D|\sqrt{x^2+y^2}-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析：将平面区域划分成 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,(x-1)^2+y^2\le 1\}$

$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1,(x-1)^2+y^2\le 1\}$

原式$=\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$

其中

$$\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1(1-r)rdr+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)rdr$$

$$=\frac{1}{9}\pi+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta)d\theta$$

$$=\frac{4}{9}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{32}{9}$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy=\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy-\iint\limits_{D_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(r-1)rdr+\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=-\frac{5}{9}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

原式$=\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$

$$=\frac{4}{9}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{32}{9}-\frac{5}{9}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}-\frac{\pi}{9}-\frac{32}{9}.$$

（20）（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有二阶连续导数，证明：

（1）若 $f(0)=0$，存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

（2）若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

证明:(1)证明:由泰勒中值定理 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$,

η 介于 0 与 x 之间,则 $f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2$, $0<\eta_1<a$ ①

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2$, $-a<\eta_2<0$ ②

①+②得: $f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}\left[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right]$③

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2,\eta_1]$ 上连续,则必有最大值 M 与最小值 m,即

$m\leq f''(\eta_1)\leq M; m\leq f''(\eta_2)\leq M$;从而 $m\leq \frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\leq M$;

由介值定理得:存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$,有 $\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$,代入③得:

$f(a)+f(-a)=a^2f''(\xi)$, $f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$

(Ⅱ)证明:设 $f(x)$ 在 $x=x_0\in(-a,a)$ 取极值,且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导,则 $f'(x_0)=0$.

又 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2$,$\gamma$ 介于

0 与 x 之间,则 $f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2$, $-a<\gamma_1<0$

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2$, $0<\gamma_2<a$

从而 $|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{1}{2}(a-x_0)^2f''(\gamma_2)-\frac{1}{2}(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$

$$\leq \frac{1}{2}\left|(a-x_0)^2f''(\gamma_2)\right|+\frac{1}{2}\left|(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$$

又 $|f''(x)|$ 连续,设 $M=\max\{|f''(\gamma_1)|,|f''(\gamma_2)|\}$,则

$$\left|f(a)-f(-a)\right|\le\frac{1}{2}M\left(a+x_0\right)^2+\frac{1}{2}M\left(a-x_0\right)^2\le M\left(a^2+x_0{}^2\right)$$

又 $x_0\in(-a,a)$，则 $\left|f(a)-f(-a)\right|\le M\left(a^2+x_0{}^2\right)\le 2Ma^2$，则 $M\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$，

即存在 $\eta=\gamma_1$ 或 $\eta=\gamma_2\in(-a,a)$，有

$$\left|f''(\eta)\right|\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|.$$

（21）**（本题满分 12 分）**

设矩阵 A 满足对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

（1）求 A；

（2）求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解析：（1）因为 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 对任意的 x_1,x_2,x_3 均成立，

所以 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

（2）$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda&-2-\lambda\\0&-1&2+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-2&\lambda&0\\0&-1&2+\lambda\end{vmatrix}$

$=(2+\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$.

$\lambda_1=-2$ 时，$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1\\-2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得特征向量的基础解系为 $\alpha_1=(0,-1,1)^T$；

$\lambda_2=2$ 时，$\lambda_2 E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得特征向量的基础解系为 $\alpha_2=(4,3,1)^T$；

$\lambda_3=-1$ 时，$\lambda_3 E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得特征向量的基础解系为 $\alpha_3=(1,0,-2)^T$；

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&4&1\\-1&3&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

（22）（**本题满分 12 分**）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$，$-\infty<x<+\infty$。令 $Y=e^X$：

（1）求 X 的分布函数；

（2）求 Y 的概率密度函数；

（3）Y 的期望是否存在？

解析：

（1）$\because F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\ (-\infty<x<+\infty)$

$\therefore F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}dt=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{d(e^t+1)}{(1+e^t)^2}=1-\dfrac{1}{1+e^x}$

（2）因为 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调且处处可导，所以当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（3）

$$EY=\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+y)^2}dy=\int_0^{+\infty}\frac{y+1-1}{(1+y)^2}dy$$

$$=[\ln(1+y)+\frac{1}{1+y}]\Big|_0^{+\infty}=+\infty$$

该反常积分发散，极限不存在，所以期望不存在.