西 北 师 范 大 学

试题附在试题袋内交回

2013年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学　　科目代码：~~619~~ 621

考试日期：2013年1月　日

（答案一律做在答题纸上，做在试题上无效）　　（试题共 3 页）

一、函数性态(共36分)

1、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{2x}, x<0\\ b+1, x=0\\ (1-2x)^{\frac{1}{x}}, x>0\end{cases}$，已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，试确定 a 和 b 的值.

2、曲线 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\dfrac{\pi}{2}-\arctan t\end{cases}$ 上点 A 处的切线平行于直线 $x+2y=0$，请确定点 A 的坐标.

3、设 $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，试证对 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$f(x)$ 为常数，并求 $f(x)$.

4、试求函数 $F(x)=\int_1^x\left[\left(\dfrac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\dfrac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)\mathrm{d}t$ 的极值，其中 $x\geq 1, f(x)>0$.

5、已知 $z=f(\dfrac{y}{x})$ 当 $x>0$ 时具有二阶连续导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

6、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

166

二、极限与微积分(共 45 分)

7、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

8、已知 $\alpha=\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$ 和 $\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$ 均为当 $x\to 0$ 时的无穷小，试比较它们无穷小阶数的高低.

9、设 f 二阶可导，计算 $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

10、设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\ge 0 \\ \dfrac{\arctan x}{1+x^2}, & -1\le x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

11、设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12、设积分区域 D 由 $y=x$ 与 $y^2=x$ 围成，计算 $\iint\limits_D \dfrac{\sin\pi y}{y}\mathrm{d}\sigma$.

13、证明曲线积分 $I=\int_L \dfrac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲线.

三、应用题(共 34 分)

14、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$a<b$.证明方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在区间 (a,b) 内只有一个根.

15、过第一象限中椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 (ξ,η) 作该椭圆的切线，使该切线与两坐标轴的正向围成的三角形的面积为最小，求点 (ξ,η) 的坐标及该三角形的

面积.

16、适当选取函数 $\varphi(x)$，作变量代换 $y=\varphi(x)u$，将 y 关于 x 的微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)y=0$ 化为 u 关于 x 的二阶常系数线性齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\lambda u=0$. 求 $\varphi(x)$ 及 λ，并求原方程的通解.

四、线性代数(共 35 分)

17、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}$ 均为 3 维列向量，且行列式

$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|=3$，求 $|-2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2|$ 的值.

18、求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}$ 的逆阵.

19、求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=-1,\\x_1-2x_2+x_3+3x_4=3,\\3x_1+8x_2-x_3+x_4=1,\\x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7.\end{cases}$

20、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&a&3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 等价，求 a 的值.

21、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$，求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量.