西 北 师 范 大 学

2013年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称： 基础数学，计算数学，概率论与数理统计

应用数学，运筹学与控制论

研究方向：各方向　　　　813

考试科目：高等代数　　　　考试日期：　月　日　午

1．（15分）设 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$。试求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高次项系数是1的最大公因式 $(f(x),g(x))$，并求 $u(x),v(x)$ 使得 $(f(x),g(x))=f(x)u(x)+g(x)v(x)$。

2．（15分）试证明，

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

，其中 A_{ij} 是 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$。

3．（20分） 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，I_m-AB 可逆。试证 I_n-BA 可逆，并求 $(I_n-BA)^{-1}$。

4．（20分） 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 A 的各行元素之和为 -1，各列元素之和为1，且非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的线性无关的解向量组所含向量的最大个数为 $n-1$。证明，A 相似于对角矩阵。

160

5.（15 分） 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 是 n 阶正定矩阵。证明，$|A| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

6. （20 分） 设 W 是数域 F 上 n 维向量空间 V 的一个子空间，且 $0<\dim W<n$。证明，W 在 V 中有无穷多个余子空间。

7. （15 分） 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中向量组 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 线性无关，

$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，向量 $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$。求方程 $Ax=b$ 的通解。

8. （15 分） 设 $F_n[x]$ 表示数域 F 上次数不超过 n 的多项式连同零多项式做成的向量空间，τ 是 $F_n[x]$ 的一个线性变换，满足 $\tau(f(x))=xf'(x)-f(x)$，

其中 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数。试求，

（1） τ 的核 $Ker\tau$ 与值域 $\tau(F_n[x])$ 的一个基；

（2） τ 在 $F_n[x]$ 的基 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 下的矩阵及 τ 的本征值。

9. （15 分） 设 V 是一个欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中一组向量，

$A=\begin{pmatrix} <\alpha_1,\alpha_1> & <\alpha_1,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_1,\alpha_n> \\ <\alpha_2,\alpha_1> & <\alpha_2,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_2,\alpha_n> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <\alpha_n,\alpha_1> & <\alpha_n,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_n,\alpha_n> \end{pmatrix}$，其中 $<\alpha_i,\alpha_j>$ 表示 α_i 与 α_j 的内积

$(i,j=1,2,\cdots,n)$。试证明，

（1）对一组实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，等式 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 成立当且仅当

$AX=0$，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$；

（2）向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关当且仅当 $|A|=0$。

161