2015年太原科技大学硕士研究生招生考试

（601）数学分析 试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、（本题15分） 设$a_1 > b_1 > 0$，且$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$。证明数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限都存在且相等。

二、（本题15分） 证明函数$y = x^2$在$[a,b]$上一致连续，但在$[a,+\infty)$不一致连续。

三、（本题20分） 求函数$y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$的极值点、凹凸区间和拐点。

四、（本题10分） 计算不定积分$\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

五、（本题15分） 证明级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2)$收敛，其中$a > 0$。

六、（本题15分） 证明函数$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx$在$[-\infty,+\infty]$上连续。

七、（本题15分） 设$z = x^2 + y^2$，其中$y = f(x)$为由$x^2 - xy + y^2 = 1$所确定的隐函数，求$\dfrac{d^2 z}{dx^2}$。

八、（本题15分） 计算球体$x^2 + y^2 + z^2 \le 4$被圆柱面$x^2 + y^2 \le 2x$所割下的部分的体积V。

九、（本题15分） 计算积分$\oint_L e^x[(y - \sin y)dx + (2 - \cos y)dy]$，其中L为$y = x^2$与$y = x$所围区域的边界线，沿逆时针方向。

十、（本题15分） 计算$I = \displaystyle\iint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy)$，其中S为$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$的外侧。

2016年太原科技大学硕士研究生招生考试

（601）数学分析 试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、（本题每小题5分，满分10分）

计算下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$

二、（本题满分15分）

证明：若$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

三、（本题满分15分）

证明：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且不存在$x\in[a,b]$，使$f(x)=0$，则$f(x)$在$[a,b]$恒正或恒负.

四、（本题满分15分）

设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$ 所确定，证明

$$\left(x^2-y^2-z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

五、（本题满分15分）

设函数$f(x)=x^p(1-x)^q$，p,q为正整数，$x\in[0,1]$，证明：存在$\eta\in(0,1)$，使得$\dfrac{p}{q}=\dfrac{\eta}{1-\eta}$.

六（本题满分 15 分）

计算三重积分 $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$，其中 V 由 $x^2+y^2=z^2, x^2+y^2+z^2=8$ 围成.

七（本题满分 20 分）

求函数 $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 在条件 $x+y=l(l>0,n\geq 1)$ 之下的极值，并证明：当 $a\geq 0,b\geq 0,n\geq 1$ 时，$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$.

八（本题满分 15 分）

计算由双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积.

九（本题满分 15 分）

设 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，计算

$$\iint\limits_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

十（本题满分 15 分）

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4n-3}$ 的和函数 $(x\geq 0)$.

2017年太原科技大学硕士研究生招生考试

（601）数学分析试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、（本题满分 15 分）

设$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续，$f(0)\neq 0$，请计算极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$的值。

二、（本题满分 15 分）

设$f(x)$是连续函数，证明对任何$c>0$，函数

$$g(x)=\begin{cases}-c, f(x)<-c,\\ f(x),|f(x)|\leq c,\text{是连续的。}\\ c, f(x)>c\end{cases}$$

三、（本题满分 20 分）

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$；

（2）存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$。

四、（本题满分 15 分）

设$u=f(x,y,z)$有连续一阶偏导数，$z=z(x,y)$由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定，并设$z\neq -1$，求du。

五、（本题满分 15 分）

设区域$D=\left\{(\mathrm{x},\mathrm{y})\mid \mathrm{x}^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$，计算二重积分$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$。

六（本题满分 15 分）

求抛物线$y=x^2$和直线$x-y=1$间的最短距离。

七（本题满分 15 分）

设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上有界，并且$\left\{f_n(x)\right\}$在$[a,b]$上一致收敛，求证：$f_n(x)$在$[a,b]$上一致有界。

八（本题满分 15 分）

计算三叶玫瑰线$r=a\sin 3\theta$所围图形的面积.

九（本题满分 15 分）

计算$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS$，其中，$\Sigma$为平面$2x+2y+z=6$在第一卦限的部分。

十（本题满分 10 分）

试叙述闭区间套定理，并用其证明闭区间上连续函数的最值定理。

2018年太原科技大学硕士研究生招生考试

（614）数学分析 试题

（可以不抄题，答案必须写在答题纸上）

一、（本题15分）

证明：若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中一个是收敛数列，另一个是发散数列，则$\{a_n \pm b_n\}$是发散数列。

二、（每小题10分，共20分）

试计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$　　　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$

三、（本题15分）

证明方程$x^n+px+q=0$（其中，n为正整数，p，q为实数）当n为奇数时，至多有三个实根。

四、（本题20分）

试求函数$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$的极值以及拐点，并求出拐点处的切线方程。

五、（本题20分）

证明由方程$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2)$确定的函数$z=z(x,y)$满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay,$$

其中，$\Phi(u)$是变量u的任意可微函数，a,b,c为常数。

六（本题15分）

计算积分$\iint\limits_D(|x|+ye^{x^2})dxdy$，其中$D$由曲线$|x|+|y|=1$所围成。

七（本题 15 分）

计算抛物面壳$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),0\le z\le 1$的质量，设此壳的密度$\rho=z$。

八（本题 15 分）

试将函数$y=\ln\frac{1}{2+2x+x^2}$在$x=-1$处展开为 Taylor 级数。

九（本题 15 分）

试叙述闭区间套定义，以及闭区间套定理，并证明之。