

# 2015 年太原科技大学硕士研究生招生考试

## (602) 数学基础 试题

(可以不抄题、答案必须写在答题纸上)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

- 当  $x \rightarrow 0$  时， $\sin(2x+x^2)$  与  $x$  比较是 ( )  
A. 较高阶的无穷小量      B. 较低阶的无穷小量  
C. 同阶的无穷小量      D. 等价的无穷小量
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  是函数  $f(x)$  在点  $x = a$  处连续的 ( )  
A. 必要条件      B. 充分条件      C. 充要条件      D. 无关条件
- 设  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则  $f'(0) =$  ( )  
A. 0      B. -1      C. 1      D. 不存在
- 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  表示矢量，则  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  的充要条件是 ( )  
A.  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$       B.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$       C.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$       D.  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$
- 设  $y - xe^y = \ln 3$ ，则  $y' =$  ( )  
A.  $\frac{e^y}{xe^y - 1}$       B.  $\frac{e^y}{1 - xe^y}$       C.  $\frac{1 - xe^y}{e^y}$       D.  $\frac{xe^y - 1}{e^y}$
- 设  $f'(\ln x) = \frac{1}{x} (x > 0)$ ，则  $f'(x) =$  ( )  
A.  $-e^{-x} + C$       B.  $e^{-x} + C$       C.  $e^x + C$       D.  $\ln x + C$
- 四阶行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$  ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

8. 设  $n$  阶方阵  $A, B, C$  满足关系式  $ABC = E$ , 其中  $E$  是  $n$  阶单位矩阵, 则必有 ( )

- A.  $ACB = E$       B.  $CBA = E$       C.  $BAC = E$       D.  $BCA = E$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

10. 设  $y = (\arctan \sqrt{x})^2$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

11. 设  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , 则  $\int e^{-x} f(e^{-x})dx =$  \_\_\_\_\_.

12. 曲线  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x(2x + 1)}$  的垂直渐近线是 \_\_\_\_\_.

13. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{ax}\right)^x = e^3$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $A, B$  均为  $n$  阶矩阵,  $|A| = 2$ ,  $|B| = -3$ , 则  $|A^* B^{-1}| =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ .

16. (本题满分 10 分)

设  $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

17. (本题满分 10 分)

计算  $I = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是以原点为中心, 以  $\pi$  和  $2\pi$  为半径的二同心圆之间的部分.

18. (本题满分 10 分)

设  $z = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$ , 其中  $f$  为可微函数, 证明:  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$ .

19. (本题满分 10 分)

求方程  $y'' - 4y = 4$  满足初值条件  $y|_{x=0} = 1$ ,  $y'|_{x=0} = 0$  的特解.

20. (本题满分 11 分)

设函数  $f(x) = x^m(1-x)^n$ ,  $m, n$  为正整数,  $x \in [0, 1]$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$\frac{m}{n} = \frac{\xi}{1-\xi}.$$

21. (本题满分 11 分)

试计算由星形线  $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$  所围区域的面积.

22. (本题满分 11 分)

求解非齐次线性方程组 
$$\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1. \end{cases}$$

23. (本题满分 11 分)

设  $n$  阶矩阵  $A, B$  满足  $R(A) + R(B) < n$ , 证明:  $A$  与  $B$  有公共的特征值和公共的特征向量.

2016年太原科技大学硕士研究生招生考试

(602) 数学基础 试题

(可以不抄题、答案必须写在答题纸上)

一、选择题：每小题3分，共30分.

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 - \cos x)^2$  是  $x^4$  的 ( ).

- A 高阶无穷小                      B 低阶无穷小  
C 同阶无穷小, 但不等价          D 等价无穷小

2. 函数  $f(x)$  有连续二阶导数, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -2$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = ( ).$$

- A 不存在                      B 0                      C -1                      D -2

3. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $e^{-x^2}$ , 则  $\int x f'(x) dx = ( )$ .

- A  $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$                       B  $-2x^2e^{-x^2} + C$   
C  $-2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C$                       D  $-2xe^{-x^2} + e^{-x^2} + C$

4. 微分方程  $y'' - y = 0$  的通解为 ( ).

- A  $y = e^x + e^{-x}$                       B  $y = e^x - e^{-x}$   
C  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$                       D  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

5. 直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$  与平面  $x + y + z = 3$  的关系是 ( ).

- A 线在面上                      B 平行  
C 垂直相交                      D 相交但不垂直

6. 二元函数  $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的极小值点是 ( ).

- A (1,0)                      B (1,2)  
C (-3,0)                      D (-3,2)

7. 设  $D: (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2, I_1 = \iint_D (x+y)^4 dx dy, I_2 = \iint_D (x+y) dx dy,$

$I_3 = \iint_D (x+y)^2 dx dy$ , 则  $I_1, I_2, I_3$  的大小关系为( ).

- A  $I_1 < I_2 < I_3$                       B  $I_3 < I_2 < I_1$   
 C  $I_2 < I_3 < I_1$                       D  $I_3 < I_1 < I_2$

8. 下列级数绝对收敛的是( ).

- A  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$                       B  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{1}{n}$   
 C  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$                       D  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

9. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均是  $n$  维列向量,  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 下列选项正确的是( ).

- A 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关  
 B 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关  
 C 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关  
 D 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关

10. 设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵. 若  $A^3 = 0$ , 则下列选项正确的是( ).

- A  $E - A$  不可逆,  $E + A$  不可逆  
 B  $E - A$  不可逆,  $E + A$  可逆  
 C  $E - A$  可逆,  $E + A$  可逆  
 D  $E - A$  可逆,  $E + A$  不可逆

二、填空题: 每小题 5 分, 共 40 分.

11. 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1999}}{n^k - (n-1)^k} = A (\neq 0, \neq \infty)$ , 则  $A =$  \_\_\_\_\_,  $k =$  \_\_\_\_\_.

12. 函数  $f(x) = xe^x$  的  $n$  阶导函数  $f^{(n)}(x) =$  \_\_\_\_\_.

13. 不定积分  $\int \sin^3 x dx =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $z = u^2v - uv^2, u = x \cos y, v = x \sin y$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_.

15. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  的收敛域为 \_\_\_\_\_.

16. 将累次积分  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ , 改变积分次序后为 \_\_\_\_\_.

17. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为二阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 则

$|B| =$  \_\_\_\_\_.

18. 设三阶矩阵  $A$  的特征值为  $2, 3, \lambda$ . 若行列式  $|2A| = -48$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 80 分.

19. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2ae^x, & x < 0, \\ 9 \arctan x + 2b(x-1)^3 & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 求常数  $a, b$ . (本

题 10 分)

20. (a) 设  $-1 \leq x \leq 0$ , 求  $F(x) = \int_{-1}^x (1-|t|) dt$ ;

(b) 设  $x \geq 0$ , 求  $F(x) = \int_{-1}^x (1-|t|) dt$ . (本题 15 分)

21. 设函数  $z = z(u, v)$ , 且  $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ , 求  $z_{xx} + z_{yy}$ . (本题 10 分)

22. 计算  $\iiint_{\Omega} (x+z) dV$ , 其中  $\Omega$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 1$  围成的区域. (本题 15

分)

23. 设曲线积分  $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x) dy$  与路径无关, 其中  $\varphi(x)$  有连续的导数, 且  $\varphi(0) = 0$ ,

计算  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ . (本题 15 分)

24. 讨论  $\lambda$  取何值时方程组  $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$  有解, 并求解. (本题 15 分)

# 2017年太原科技大学硕士研究生招生考试

## (602) 数学基础 试题

(可以不抄题、答案必须写在答题纸上)

### 一、选择题：每小题4分，共32分。

1. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处 ( ).

- A 极限不存在                      B 极限存在但不连续  
C 连续但不可导                    D 可导

2. 设  $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$ , 则下列选项正确的是 ( ).

- A  $x_0$  是  $f(x)$  的驻点                      B  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值  
C  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值                D  $x_0$  是  $f(x)$  的拐点

3. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $e^{-2x}$ , 则  $\int f'(x) dx = ( )$ .

- A  $e^{-2x} + C$                               B  $-2e^{-x^2} + C$   
C  $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$                           D  $-x^2e^{-2x} + C$

4. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 则方程  $\int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt = 0$  在

$(a, b)$  内的根有 ( ).

- A 0 个                                      B 1 个  
C 2 个                                      D 3 个

5. 下列级数条件收敛的是 ( ).

- A  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$                       B  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{n}$   
C  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$                                   D  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

6. 设线性无关的函数  $y_1, y_2, y_3$  是二阶非齐次线性微分方程  $y'' + p(x)y' + Q(x)y = f(x)$  的解, 则其通解为 ( ).

A  $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$

B  $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$

C  $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$

D  $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

7. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( ).

A  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2$

B  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

C  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$

D  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

8. 设  $A, B, C$  为  $n$  阶矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵. 若  $B = E + AB, C = A + CA$ , 则  $B - C$  为 ( ).

A  $E$

B  $-E$

C  $A$

D  $-A$

二、填空题: 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$  的收敛域为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 设  $D: x^2 + y^2 \leq a^2 (a \geq 0)$ , 则当  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$ .

12. 设  $L$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被  $x + y + z = 0$  所截得的圆, 则  $\int_L x^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 设三阶方阵  $A, B$  满足  $A^2B - A - B = E$ , 其中  $E$  为三阶单位矩阵, 若

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 设  $A$  为二阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为线性无关的二维列向量,  $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , 则  $A$  的非零特征值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



三、解答题:共 94 分.

15. 设  $x > 0$ , 证明  $\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$ . (10 分)

16. 计算定积分  $\int_{-1}^1 (|x| + x)e^{-|x|} dx$ . (10 分)

17. 设  $y$  是由方程  $y = 1 + xe^y$  确定的隐函数, 求二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . (10 分)

18. 在 XOY 平面上求一点  $u(x, y)$  使得  $u$  到三条直线  $x = 0, y = 0$  和  $x + 2y - 16 = 0$  的距离的平方和最小. (12 分)

19. 设  $L$  为 XOY 平面上不经过原点的闭曲线, 求  $I = \oint \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . (10 分)

20. 计算  $I = \iint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy)$ , 其中  $S$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  取外侧. (10 分)

21. 设函数  $y = f(x)$  满足微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ , 且在点  $(0, 1)$  与曲线  $y = x^2 - x + 1$  有相同的切线, 求函数  $y = f(x)$ . (12 分)

22. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ , 求  $a, d$  为何值时  $Ax = b$  有无穷多解. (10 分)

23. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{99}$ . (10 分)

# 2018年太原科技大学硕士研究生招生考试

## (601) 数学基础 试题

(可以不抄题、答案必须写在答题纸上)

一. 选择题: 1~8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 下面每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设  $f(x-1) = x^2 + 2x + 1$ , 则  $f(x) =$  ( ).

- (A)  $(x+1)^2$ .      (B)  $x^2$ .      (C)  $x^2 + 4x + 2$ .      (D)  $(x+2)^2$ .

2. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x(1 - \cos x)$  是  $x^3$  的 ( ).

- (A) 同阶但不是等价无穷小.      (B) 等价无穷小.  
(C) 高阶无穷小.      (D) 低阶无穷小.

3. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $f'(0) =$  ( ).

- (A) 0.      (B) -1.      (C) 1.      (D) 不存在.

4. 下列级数绝对收敛的是 ( ).

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .      (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ .

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{1}{n}$ .      (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ .

5. 直线  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$  和平面  $2x + 3y + 3z = 8$  的交点是 ( ).

(A)  $\left(3, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .      (B)  $(-1, 1, 1)$ .

(C)  $(-2, 2, -3)$ .      (D)  $(3, -1, 2)$ .

6.  $\Sigma$  是介于平面  $z = 0$  和  $z = 3$  之间圆柱面  $x^2 + y^2 = 9$  整个表面的外侧, 则第二类曲面积分

$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy =$  ( ).

- (A)  $81\pi$ .      (B)  $54\pi$ .      (C)  $18\pi$ .      (D)  $8\pi$ .

7.  $n$  阶矩阵  $A$  以 0 为其特征值是  $A$  为奇异矩阵的 ( ).
- (A) 充分必要条件. (B) 必要非充分条件.  
(C) 既非充分也非必要条件. (D) 充分非必要条件.
8. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关的充分必要条件是 ( ).
- (A) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任意两个向量的分量不成比例.  
(B) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中不含零向量.  
(C) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任意一个向量不能由其余  $n-1$  个向量线性表示.  
(D) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中有部分向量线性无关.

二. 填空题: 9~16 小题, 每小题 3 分, 共 21 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9.  $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$  \_\_\_\_\_.

10. 曲线  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$  的渐近线是 \_\_\_\_\_.

11. 设  $\Gamma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面  $x + y + z = 0$  所截得的圆周, 则第一类曲线积分

$$\int_{\Gamma} x^2 ds =$$

12. 将二次积分  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ , 改变积分次序后为 \_\_\_\_\_.

13. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 则  $(A + 2E)^{-1}(A^2 - 4E) =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $A$ 、 $B$  均为  $n$  阶方阵,  $|A| = 2$ ,  $|B| = -3$ , 则  $|A^* B^{-1}| =$  \_\_\_\_\_.

15. 设  $y = f(x)$  为单调函数, 且二阶可导,  $g(x)$  为其反函数, 若  $f(1) = 2$ ,

$f'(1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $f''(1) = 1$ , 则  $g''(2) =$  \_\_\_\_\_.

三. 解答题: 16~26 小题, 共 105 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本题 10 分) 计算行列式 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

17. (本题 8 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}.$

18. (本题 10 分) 求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$  的通解.

19. (本题 10 分) 求函数  $f(x) = (x-4) \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$  的单调区间与极值.

20. (本题 8 分) 计算抛物线  $y^2 = 2x$  与直线  $y = x - 4$  所围图形的面积.

21. (本题 10 分) 求不定积分  $\int (x^2 - 1) \sin 2x dx.$

22. (本题 10 分) 二元函数  $z = z(x, y)$  由三元方程  $z^3 - 3xyz = a^3$  所确定, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

23. (本题 10 分) 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x+z) dV$ , 其中  $\Omega$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 1$  围成的区域.

24. (本题 14 分)  $\lambda$  为何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$
 有解, 在有解时求

基础解系, 并写出通解.

25. (本题 10 分) 设曲线积分  $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x) dy$  与路径无关, 其中  $\varphi(x)$  有连续的导数,

且  $\varphi(0) = 0$ , 计算  $\int_{(0,0)}^{(1,2)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy.$

26. (本题 5 分) 设方程  $x^n + nx - 1 = 0$ , 其中  $n = 2, 3, \dots$ . 证明此方程在  $[0, +\infty)$  上有唯

一实根  $x_n$ , 且当  $\alpha > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$  收敛.