817

沈阳工业大学

2018年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　第 1 页 共 2 页

一、(60分，每小题6分）判断对错并简述理由。

1、如果α是$f'(x)$的m重根，那么α是$f(x)$的$m+1$重根。

2、设$A,B,AB-E$都是可逆矩阵，那么$A-B^{-1}$可逆。

3、设齐次线性方程组$AX=0$与$BX=0$，其中A,B均为$m\times n$矩阵，若$AX=0$的解均是$BX=0$的解，则矩阵的秩$R(A)\le R(B)$。

4、设矩阵$A_1=\begin{bmatrix}a&1\\1&1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}1&a\\1&1\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}1&1\\a&1\end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&a\end{bmatrix}$，则$A_1,A_2,A_3,A_4$一定是线性相关的。

5、如果方阵A与B相似，C与D相似，那么矩阵$\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix}$也相似。

6、设A是正交矩阵，且$|A|=-1$，那么-1是A的一个特征值。

7、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是欧氏空间$V$的一组基，且$\gamma\in V$使$(\gamma,\alpha_i)=0,i=1,2,\cdots,n$，那么$\gamma=0.$

8、设σ是线性空间V上的线性变换，如果σ在任意一组基下的矩阵都相同，那么σ是数乘变换。

9、设A是正定矩阵，整数$k>1$，那么A^k也是正定矩阵。

10、设σ是n维线性空间V上的线性变换，如果$\sigma^{n-1}(\xi)\neq 0$，但$\sigma^n(\xi)=0$，则$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)(n>0)$是$V$的一组基。

二、(10分）如果$(x-\alpha)^k\big|f(x^n)$，证明：$(x^n-\alpha^n)^k\big|f(x^n)$，其中$k\ge 1,n\ge 1$是正整数，$\alpha$是非零常数。

三、(10分）计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a&a\\-a&x&a&\cdots&a&a\\-a&-a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-a&-a&-a&\cdots&-a&x\end{vmatrix}$.

沈阳工业大学

2018年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

四、（12分）已知线性方程组（I）$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$ 与（II）$\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1 \end{cases}$.

（1）求解方程组（I），用其导出组的基础解系表示通解；

（2）当方程组（II）中的参数 m,n,t 为何值时，两个方程组同解。

五、（10分）设矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(b_{ij})_{n\times m}$，证明：$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n.$

六、（10分）设 V_1,V_2 是数域 P 上的线性空间 V 的两个非平凡子空间，证明：在 V 中存在向量 α，使 $\alpha\notin V_1$ 且 $\alpha\notin V_2$。

七、（10 分）设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是一若尔当块，证明：V 不能分解成两个非平凡的 σ—子空间的直和。

八、（10分）用 $R[x]_4$ 表示实数域 R 上次数小于 4 的一元多项式组成的集合，则 $R[x]_4$ 关于内积

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx，\quad f(x),g(x)\in R[x]_4$$

构成一个欧氏空间。设 W 是由零次多项式加上零多项式组成的子空间，求 $W^{\perp}$ 的维数和一组基。

九、（10分）设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，其中 $A'=A, X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$.证明：该二次型在条件 ${x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2=1$ 下的最大值恰为矩阵 A 的最大特征值，最小值恰为矩阵 A 的最小特征值。

十、(8分) 设 A 是 $n\times s$ $(n>s)$ 实矩阵，A 的 s 个列向量线性无关，证明：存在列向量线性无关的矩阵 $B_{n\times(n-s)}$，使矩阵 $P=(A,B)$ 可逆，且有 $B'A=0.$