沈阳工业大学

2017 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

一、（60 分，每小题 6 分）判断对错并简述理由。

1. 多项式$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$没有重根。

2. 设A是奇数阶矩阵，且满足$AA^T=E$，则$|E-A^2|=0$. 其中E为单位阵。

3. 与所有n阶对角矩阵可交换的矩阵也必是n阶对角矩阵。

4. 设M_n为数域P上全体n阶方阵按矩阵加法与数乘运算构成的线性空间，则M_n中的子集

$$W=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n \mid a_{11}+a_{22}=0\}$$不能构成M_n的子空间。

5. 设A是复数域上的n阶方阵，若A为数量矩阵，则A的不变因子中可能有常数。

6. 设σ是线性空间V上的线性变换，且σ的行列式为零，则σ有一个特征值为零。

7. 设方阵A与A^2的秩相等，那么n元线性方程组$AX=0$与$A^2X=0$同解。

8. 设A为n阶实对称矩阵，且满足$A^2=0$，则$A=0$。

9. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$是$n$维欧氏空间$R^n$中一组正交向量组，$\beta_1,\beta_2\in R^n$满足

$$(\beta_1,\alpha_i)=(\beta_2,\alpha_i)=0(i=1,2,\cdots,n-1).$$

则β_1,β_2线性无关。

10. 设A为 3 阶方阵，满足$|A-E|=|A+2E|=|2A-3E|=0$，则$5A+2E$可对角化。

二、（10 分）求a,b满足什么条件，多项式$x^3+3ax+b$有重因式。

三、（10 分）计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

四、（10 分）设A,B是n阶矩阵，证明：$E+AB$可逆的充要条件是$E+BA$可逆。

沈阳工业大学

2017 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

五、（12 分）设 A,B 为 n 阶矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的基础解系分别含有 l 与 m 个向量，证明：（1）$(AB)X=0$ 至少有 $\max(l,m)$ 个线性无关的解向量；

（2）如果 $l+m>n$，则 $(A+B)X=0$ 必有非零解；

（3）如果 $AX=0$ 与 $BX=0$ 无公共非零解向量，且 $l+m=n$，则任意一向量 α 可唯一地表示成 $\alpha=\beta+\gamma$，这里 β,γ 分别是 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解向量。

六、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维欧氏空间 V 的一个标准正交基，试证：$\begin{cases}\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)\\ \beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)\\ \beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)\end{cases}$ 也是 V 的一个标准正交基。

七、（10 分）设 $A\in P^{n\times n}$ 是幂等矩阵，即 $A^2=A$，令 $V_1=\{X\in P^n \mid AX=0\}$，$V_2=\{X\in P^n \mid AX=X\}$，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；（2）求正交变换 $X=PY$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

九、（10 分）设 σ,ρ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，$f(\lambda),g(\lambda)$ 分别是 σ,ρ 的特征多项式，已知 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$，证明：$(f(\rho))^{-1}(0)=(g(\sigma))^{-1}(0)$.

十、（8 分）设 A 为 n 阶方阵，A 的秩 $R(A)=1$，求 A^n.