沈阳工业大学

2016年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

一、（60分，每小题6分）判断对错并简述理由。

1、若整系数多项式$f(x)$在Z上不可约，则$f(x)$在Q上也不可约。

2、设A,B为n阶方阵，若$A\neq 0$且$B\neq 0$，则$AB\neq 0$。

3、设矩阵A为3阶非零矩阵，$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，且$AB=0$，当$t\neq 6$时，$A$的秩为2.

4、二次型$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3{}^2+x_2x_3$是正定二次型。

5、设A为n阶方阵，$AA'=E,|A|<0$，则$|A+E|=0.$

6、R^n中的子集$V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_1=a_2=\cdots=a_n,a_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$是$R^n$的子空间。

7、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，且$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots,\beta_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n$，$\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$也线性无关。

8、如果W_1,W_2是线性变换ρ的不变子空间，则$W_1\cap W_2$也是ρ的不变子空间。

9、设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-3&-1\\2&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}$，则$A$在有理数域上不可相似对角化。

10、设A为n阶实对称矩阵，则属于A的不同特征值的特征向量必线性无关，但不一定正交。

二、（10分）证明：如果$f(x)|f(x^n)$，则$f(x)$的根只能是0或单位根。

三、（10分）计算行列式$D=\begin{vmatrix}x_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_n\\a_1&x_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_n\\a_1&a_2&x_3&\cdots&a_{n-1}&a_n\\&\cdots&&\cdots&&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&x_{n-1}&a_n\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&x_n\end{vmatrix}$，$(x_i\neq a_i,i=1,2,\cdots,n).$

四、(10分) 已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为4维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $AX=\beta$ 的通解。

五、(10分) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=r$，证明：存在 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q，使 $A=PQ.$

六、(10分) 设 α 与 β 是 n 维欧氏空间 V 中的两个不同的向量，且 $|\alpha|=|\beta|=1$，证明 $(\alpha,\beta)\neq 1.$

七、(10分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2x_1x_3+2\beta x_2x_3$，经过正交变换 $X=PY$ 化成 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_3^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)',Y=(y_1,y_2,y_3)'$ 是三维列向量，P 是三阶正交矩阵，求常数 α,β，并求所用的正交变换。

八、(10分) 设 ρ，τ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换，如果 ρ 的秩与 τ 的秩之和小于 n，证明：ρ，τ 有公共的特征向量。

九、(12分) 设 V 是数域 P 上所有 n 阶对称矩阵关于矩阵的加法和数乘运算构成的线性空间，令

$$V_1=\{A\in V|tr(A)=0\},\quad V_2=\{\lambda E_n|\lambda\in P\}.$$

(1) 证明：V_1,V_2 都是 V 的子空间；(2) 分别求出 V_1,V_2 的一组基和维数；(3) 证明：$V=V_1\oplus V_2$.

十、(8分) 设 A 为 n（$n\geq 2$）阶复矩阵，且 A 不可逆，求 A^* 的若尔当标准形。