

## 2016 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 数学分析

第 1 页 共 2 页

一、(每小题 5 分, 共计 30 分) 计算下列各题

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$  (5 分);

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$  (5 分);

3. 已知  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$  (5 分);

4. 已知  $z = f(xy^2, x^2y)$  可微, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  (5 分);

5. 计算  $\int_L |x| ds$ , 其中  $L$  为单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  (5 分);

6. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  的收敛半径及收敛域 (5 分)。

二、(10 分) 证明当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时不等式  $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$  成立。三、(15 分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(1) = 0$ , 试证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$  成立。四、(15 分) 证明: 当  $0 < p \leq 1$  时, 反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  是条件收敛的, 并利用此结果证明反常积分  $\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx$  也是条件收敛的。五、(15 分) 考察函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  的连续性和可微性。六、(15 分) 求函数  $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$  在条件  $xyzt = c^4$  (其中  $x, y, z, t > 0, c > 0$ ) 下的极值。

七、(15分) 计算  $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ , 其中  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ 。

八、(15分) 计算曲线积分  $\int_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ , 其中  $L$  是以  $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$  为顶点的三角形, 方向取正向。

九、(10分) 计算曲面积分  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , 其中  $S$  为上半球面  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  的外侧。

十、(10分) 证明: 函数项级数  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$  在  $[\ln 2, \ln 3]$  上一致收敛, 并计算  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t) dt$ 。