(装 订 线)

机密★启用前

青岛理工大学 2016 年硕士研究生入学试题

科目代码：601　科目名称：数学分析

注意事项：1. 答题必须写明题号，所有答案必须写在答题纸上。写在试题、草稿纸上的答案无效；2. 考毕时将试题和答题纸一同上交。

1（本题满分 25 分）计算

(1)（满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$。

(2)（满分 15 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$。

2（本题满分 15 分）设 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt$。证明

$g''(x)+g(x)=f(x)$，$g(0)=g'(0)=0$。

3（本题满分 15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(b)=f(a)=0$，证明：

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

4（本题满分 30 分，每小题 15 分）

(1) 求曲线 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ 所围区域的面积，其中 $a_1b_2-a_2b_1\ne0$。

(2)计算 $\iint\limits_{\Omega}\operatorname{sgn}(x^2+y^2-1)dxdy$，其中 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$，

$\Omega=\{(x,y)|0\le x\le1, 0\le y\le1\}$。

5（本题满分 20 分）求二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ 在 n 维单位球面

$\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n\,\middle|\,\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=1\right\}$ 上的最大值和最小值。

6（本题满分 15 分） 求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$的收敛域。

7（本题满分 15 分） 叙述并证明拉格朗日(Lagrange)微分中值定理。

8（本题满分 15 分） 证明函数 $f(x)=\cos(\sqrt{x})$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续。