(装 订 线)

机密★启用前

青岛理工大学2015年硕士研究生入学试题

科目代码：817　　科目名称：高等代数

注意事项：1.答题必须写明题号，所有答案必须写在答题纸上。写在试题、草稿纸上的答案无效；2.考毕时将试题和答题纸一同上交。

一、计算下列各题（8分+12分+12分=32分）

1、计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 1-n & 0 \end{vmatrix}$.

2、已知$n\times n$矩阵 $A=\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$a_n\neq 0$，求 A^{-1}.

3、设3矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，且$ABA^{-1}=BA^{-1}+2E$，其中$E$为3阶单位矩阵，求矩阵$B$.

二、证明下列各题（12分+12分+8分=32分）

1、已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，证明 A，B合同且相似.

2、设$A,B\in P^{n\times n}$，$R(A)$表示矩阵A的秩，证明：

（1）如果，$AB=0$ 则 $R(A)+R(B)\le n$；

（2）$R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)\le n-2 \end{cases}$，其中，$R(A^*)$表示矩阵$A$的伴随矩阵的秩.

3、设T是数域P上线性空间V的线性变换，$\lambda_1\ne\lambda_2$是线性变换T的两个特征值，$\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2$是线性变换$T$分别属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，证明：

（1）$\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2$线性无关；

（2）$\vec{\varepsilon}_1+\vec{\varepsilon}_2$不是线性变换$T$的特征向量.

三、（16 分）已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-a \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b \end{cases}$

（1）a，b取何值时方程组有解；

（2）在有解的情况下求方程组的一般解.

四、（18 分）已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$，且二次型矩阵$A$的秩为 2.

（1）求a的值；

（2）求正交变换$x=Qy$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形；

（3）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

五、（**20** 分）已知 $P^{n\times n}$ 是数域 P 上 n 阶方阵的全体，且关于矩阵加法与数乘运算构成线性空间.

$V_1=\{A\mid A\in P^{n\times n},\quad A'=A\}$，$V_2=\{A\mid A\in P^{n\times n},\quad A'=-A\}$，分别表示对称和反对称矩阵的集合，其中 A' 是矩阵 A 的转置矩阵.

（1） 证明：V_1，V_2 均为线性空间 $P^{n\times n}$ 的线性子空间；

（2） 证明：任意 n 阶方阵可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和；

（3） 证明：$P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$，其中 $\oplus$ 表示直和；

（4） 分别求出 V_1 和 V_2 的一组基（不必证明），以及维数 $\dim V_1$，$\dim V_2$ 和 $\dim(V_1+V_2)$.

六、（20 分）设 $V=\{A\mid A\in R^{2\times 2}\}$ 是 2 阶实矩阵全体按矩阵加法与数乘构成的线性空间，$M=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\in V$，定义 V 上的变换：$Tx=Mx,\quad \forall x\in V$.

（1）证明：T 是 V 上的线性变换；

（2）求线性变换 T 在基

$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵 C；

（3）求线性变换 T 的值域 TV 以及 TV 的一组基；

（4）求线性变换 T 的核 $T^{-1}(0)$ 以及 $T^{-1}(0)$ 的一组基.

七、（**12** 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$ 的行列式因子，不变因子，初等因子和 Jordan 标准形.