2021 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题解析

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)$ 是 x^7 的 （　　）.

(A) 低阶无穷小.　　(B) 等价无穷小.　　(C) 高阶无穷小.　　(D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】C.

【解析】因为当 $x \to 0$ 时，$\left[\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt\right]' = 2x(e^{x^6}-1) \sim 2x^7$，所以 $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)$ 是 x^7 的高阶无穷小，正确答案是 C.

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处（　　）

(A) 连续且取极大值.　　(B) 连续且取极小值.

(C) 可导且导数为 0.　　(D) 可导且导数不为 0.

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}-1=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，故选 D.

(3) 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有两个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围 （　　）.

(A) $(e,+\infty)$.　　(B) $(0,e)$.　　(C) $(0,\dfrac{1}{e})$.　　(D) $(\dfrac{1}{e},+\infty)$.

【答案】A.

【解析】令 $f(x)=ax-b\ln x=0$，$f'(x)=a-\dfrac{b}{x}$，令 $f'(x)=0$ 有驻点 $x=\dfrac{b}{a}$，

$f\left(\dfrac{b}{a}\right)=a\cdot\dfrac{b}{a}-b\cdot\ln\dfrac{b}{a}<0$.从而 $\ln\dfrac{b}{a}>1$，可得 $\dfrac{b}{a}>e$，选 A.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$（　　）

(A) $dx+dy$.　　(B) $dx-dy$.　　(C) dy.　　(D) $-dy$.

【答案】C

【解析】 $f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1)$ ①

$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$ ②

分别将$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$代入①②式有

$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$，$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$

联立可得 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，$df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$，故选C.

(5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）

(A) 2,0.　　(B) 1,1.　　(C) 2,1.　　(D) 1,2.

【答案】B

【解析】 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2x_2^{\,2}+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，故多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$.

令上式等于零，故特征值为-1，3，0，故该二次型正惯性指数为1，负惯性指数为1，故选B.

（6）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$（　　）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

【解析】由 A 是正交阵知 A 的列向量线性无关，所以 $r\left(B\right)=3$，且

$B\alpha_4=0\Rightarrow Bx=0$的通解为$k\alpha_4$，又

$$B\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta\Rightarrow Bx=\beta\text{的通解为}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4,\text{应选}D$$

(7) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可分别取（　　）.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】C.

【解析】

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\-1&2&-5&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&-6&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{pmatrix}$$

$=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$，则 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$；

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}，\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}，选C.$$

(8) 设 A，B 为随机变量，且 $0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

(B) 若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$.

(C) $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

【答案】D

【解析】$P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$

$$P(\overline{A}|A\cup B)=\frac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

因为$P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，固有$P(A)>P(B)-P(AB)$，故选$\mathrm{D}$.

(9) 设(X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，$\cdots$，(X_n,Y_n)为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)$的简单随机样本，

令$\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则

(A) $\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}{n}$.

(B) $\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}{n}$.

(C) $\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(D) $\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

【答案】C

【解析】因为X，Y是二维正态分布，所以$\overline{X}$与$\overline{Y}$也服从二维正态分布，则$\overline{X}-\overline{Y}$也服从二维正态分布，即$E(\hat{\theta})=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，

$D(\hat{\theta})=D(\overline{X}-\overline{Y})=D(\overline{X})+D(\overline{Y})-\mathrm{cov}(\overline{X},\overline{Y})=\frac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$，故选$\mathrm{C}$.

(10) 设总体X的概率分布为$P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$，利用李爱珍总体的样本值 1，3，2，2，1，3，1，2，可得θ的最大似然估计值为

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{3}{8}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{5}{2}$.

【答案】A

【解析】似然函数$L(\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5$

取对数$\ln L(\theta)=3\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right)+5\ln\left(\frac{1+\theta}{4}\right)$

$\frac{dL(\theta)}{\theta}=0\Rightarrow\theta=\frac{1}{4}$,选$A$

二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$________.

【答案】$\dfrac{\sin\frac{1}{e}}{2e}$

【解析】$\frac{dy}{dx}=-\sin e^{-\sqrt{x}}\left(e^{-\sqrt{x}}\bullet\frac{1}{-2\sqrt{x}}\right),\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=\dfrac{\sin\frac{1}{e}}{2e}$

(12) $\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$______.

【答案】6

【解析】$\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{d(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\frac{d(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}=6$.

(13) 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\cdot\sin\pi x(0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体体积为______.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$V=\pi\int_0^1(\sqrt{x}\cdot\sin\pi x)^2dx=\pi\int_0^1 x\sin^2\pi xdx\overset{\pi x=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 tdt=\frac{\pi}{4}$.

(14) 差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为______.

【答案】$y=y^*+\bar{y}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$，$C$ 为任意常数.

【解析】$\bar{y}=C$，$y^*=\frac{1}{2}(at+b)$，$(t+1)(a(t+1)+b)-t(at+1)=t$，$2at+a+b=t$，$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，$y=y^*+\bar{y}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$，$C$ 为任意常数.

（15）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________。

【答案】-5

【解析】$f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 0 & 1 & 2x\\ 1 & x-1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & x & 1\\ 2 & -3 & 1 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 0 & 1 & 0\\ 1 & x-1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & x & -3\\ 2 & -3 & 1 & x-4\end{vmatrix}$，由特征值与特征矩阵的关系知：$x^3$ 项的系数为-5。

（16）甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X，Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数_______.

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】联合分布律 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1)\\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$，$X$ 的边缘分布 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,$Y$ 的边缘分布 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,易知 $Cov(X,Y)=\frac{1}{20}$， $DX=\frac{1}{4},DY=\frac{1}{4}$, 即 $\rho_{XY}=\frac{1}{5}$.

三、解答题：17～22 小题,共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)（本小题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 α 值.

【答案】$\alpha=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{e}-e)$.

【解析】要想极限存在，则左右极限相等.

又由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}\alpha+e$. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{e}$.

从而 $\frac{\pi}{2}\alpha+e=-\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{e}$，即 $\alpha=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{e}-e)$.

(18)（本小题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

【答案】$(-1,0)$ 处取极小值 2；$(\frac{1}{2},0)$ 处取极小值 $\frac{1}{2}-2\ln 2$.

【解析】

$\begin{cases} f_x'=\dfrac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0\\ f_y'=\dfrac{y}{x^2}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x^2+x-1-y^2=0\\ y=0\end{cases}$.得驻点 $(-1,0)$，$(\frac{1}{2},0)$.

$$\begin{cases} f_{xx}'' = \dfrac{(4x+1)x-3(2x^2+x-1-y^2)}{x^4} \\ f_{xy}'' = \dfrac{-2y}{x^3} \\ f_{yy}'' = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

驻点$(-1,0)$处A=3， B=0， C=1， $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=3>0$， $\mathrm{A}>0$，故$f(x,y)$在$(-1,0)$处取极小值2；

驻点$(\frac{1}{2},0)$处A=24， B=0， C=4， $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=3>0$， $\mathrm{A}>0$，故$f(x,y)$在$(\frac{1}{2},0)$处取极小值$\frac{1}{2}-2\ln 2$；

(19)（本小题满分 12 分）

设有界区域D是$x^2+y^2=1$和直线$y=x$以及x轴在第一象限围成的部分，计算二重积分$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)dxdy$.

【答案】$\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}$

$$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta\int_0^1 e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^3dr=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta\int_0^1 e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^2dr^2$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta\int_0^1 e^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}udu$$

$$\int_0^1 e^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}udu=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\int_0^1(\cos\theta+\sin\theta)^2ue^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}d(\cos\theta+\sin\theta)^2$$

$$=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\int_0^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}te^tdt$$

$$=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\left[e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-1\right]$$

所以上式

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}\left[e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-1\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}e^{u^2}du-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^{u^2}-1}{u^3}du$$

其中，

$$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}e^{u^2}du=\int_1^{\sqrt{2}}u^2d(\frac{1}{2}e^{u^2})=\frac{1}{2u^2}e^{u^2}\Big|_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}e^{u^2})(-2u^{-3})du=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}e+\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^{u^2}}{u^3}du$$

所以原式$\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\int_1^{\sqrt{2}}u^{-3}du=\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}$.

(20)（本小题满分 12 分）

设n为正整数，$y=y_n(x)$是微分方程$xy'-(n+1)y=0$满足条件$y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$的解.

(1) 求$y_n(x)$；

(2) 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$的收敛域及和函数.

【答案】

(1) $y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.　(2) 收敛域$[-1,1]$，$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in(-1,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$.

(1) $y'-\frac{(n+1)y}{x}=0$，得$y=Ce^{\int\frac{n+1}{x}dx}=Cx^{n+1}$，将$y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$代入，$C=\frac{1}{n(n+1)}$，

$y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$的收敛域为$[-1,1]$.

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=(1-x)\ln(1-x)+x$，$x\in(-1,1)$

又因为$S(x)$在$[-1,1]$上连续，所以$S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=1$.

所以$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in(-1,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$

（21）（本题满分 12 分）

设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$仅有两个不同的特征值。若$A$相似于对角矩阵，求$a,b$的值，并求可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角矩阵。

【解析】由$|\lambda E-A|=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$，

当$b=3$时，由A可相似对角化知，二重跟对应的特征值有两个线性无关的特征向量。所以

$r\left(3E-A\right)=1\Rightarrow a=-1$，此时 3 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，1 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}$

当 b=1 时，同理可得 $r\left(E-A\right)=1\Rightarrow a=1$，1 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，3 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$。

（22）（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X，较长的一段长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{X}{Y}$.

(1) 求 X 的概率密度.

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

【答案】(1) $X\sim f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,其他\end{cases}$；(2) $f_Z(z)=\left(F_Z(z)\right)'=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2},z\geq 1\\0,其他\end{cases}$；

(3) $-1+2\ln 2$.

【解析】(1) 由题知：$X\sim f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,其他\end{cases}$.

(2) 由 $Y=2-X$，即 $Z=\dfrac{2-X}{X}$，先求 Z 的分布函数.

$F_Z(z)=P\left\{Z\leq z\right\}=P\left\{\dfrac{2-X}{X}\leq z\right\}=P\left\{\dfrac{2}{X}-1\leq z\right\}$

当 $z<1$ 时，$F_Z(z)=0$.

当 $z\geq 1$时，$F_Z(z)=P\left\{\frac{2}{X}-1\leq z\right\}=1-P\left\{X\leq\frac{2}{z+1}\right\}=1-\int_0^{\frac{2}{t+1}}1dx=1-\frac{2}{z+1}$.

$$f_Z(z)=\left(F_Z(z)\right)'=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, z\geq 1\\ 0,其他\end{cases}.$$

(3) $E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\frac{x}{2-x}\cdot 1dx=-1+2\ln 2$.