# 2021年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题解析

**一、选择题:1～10小题,每小题5分,共50分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

（1）当$x\to 0$时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)$是$x^7$的 （　　）.

(A) 低阶无穷小.　　(B) 等价无穷小.　　(C) 高阶无穷小.　　(D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】C.

【解析】因为当$x\to 0$时，$\left[\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt\right]'=2x(e^{x^6}-1)\sim 2x^7$，所以$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)$是$x^7$的高阶无穷小，正确答案是C.

（2）函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，在$x=0$处（　　）

(A) 连续且取极大值.　　(B) 连续且取极小值.

(C) 可导且导数为0.　　(D) 可导且导数不为0.

【答案】D

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}-1=f(0)$，故$f(x)$在$x=0$处连续.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，故选D.

(3) 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为$2cm/s$，$-3cm/s$，当底面半径为$10cm$，高为$5cm$，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为 （　　）.

(A) $125\pi cm^3/s$，$40\pi cm^2/s$.

(B) $125\pi cm^3/s$，$-40\pi cm^2/s$.

(C) $-100\pi cm^3/s$，$40\pi cm^2/s$.

(D) $-100\pi cm^3/s$，$-40\pi cm^2/s$.

【答案】C.

【解析】由题意知. $\dfrac{dr}{dt}=2$，$\dfrac{dh}{dt}=-3$，又$V=\pi r^2h$，$S=2\pi rh+2\pi r^2$.

则$\dfrac{dV}{dt}=2\pi rh\dfrac{dr}{dt}+\pi r^2\dfrac{dh}{dt}$，$\dfrac{dS}{dt}=2\pi h\dfrac{dr}{dt}+2\pi r\dfrac{dh}{dt}+4\pi r\dfrac{dr}{dt}$.

当$r=10$，$h=5$时，$\frac{dV}{dt}=-100\pi$，$\frac{dS}{dt}=40\pi$，选C.

(4) 设函数$f(x)=ax-b\ln x(a>0)$有两个零点，则$\frac{b}{a}$的取值范围 （　　）.

(A) $(e,+\infty)$.　　(B) $(0,e)$.　　(C) $(0,\frac{1}{e})$.　　(D) $(\frac{1}{e},+\infty)$.

【答案】A.

【解析】令$f(x)=ax-b\ln x=0$，$f'(x)=a-\frac{b}{x}$，令$f'(x)=0$有驻点$x=\frac{b}{a}$，

$f\left(\frac{b}{a}\right)=a\cdot\frac{b}{a}-b\cdot\ln\frac{b}{a}<0$.从而$\ln\frac{b}{a}>1$，可得$\frac{b}{a}>e$，选A.

(5) 设函数$f(x)=\sec x$在$x=0$处的2次泰勒多项式为$1+ax+bx^2$，则 （　　）.

(A) $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$.　　(B) $a=1$，$b=\frac{1}{2}$.

(C) $a=0$，$b=-\frac{1}{2}$.　　(D) $a=0$，$b=\frac{1}{2}$.

【答案】D.

【解析】由$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$知当$f(x)=\sec x$时，

$f(0)=\sec 0=1$，

$f'(0)=(\sec x\tan x)\Big|_{x=0}=0$，$f''(0)=(\sec x\tan^2 x+\sec^3 x)\Big|_{x=0}=1$，则

$f(x)=\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，选D.

（6）设函数$f(x,y)$可微，且$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则$df(1,1)=$（　　）

(A) $dx+dy$.　　(B) $dx-dy$.　　(C) $dy$.　　(D) $-dy$.

【答案】C

【解析】$f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1)$　①

$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$　②

分别将$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$代入①②式有

$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$，$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$

联立可得$f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，$df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$，故选C.

(7) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx =$（　　）

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$　　　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$.　　　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$.

【答案】B

【解析】由定积分定义秩，将 $(0,1)$ 分成 $n$ 份，取中间点的函数

$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$，即选 B .

(8) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）

(A) $2,0$.　　　(B) $1,1$.　　　(C) $2,1$.　　　(D) $1,2$.

【答案】B

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2x_2^{\ 2}+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，故多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$ .

令上式等于零，故特征值为 $-1$，$3$，$0$，故该二次型正惯性指数为 $1$，负惯性指数为 $1$，故选 B .

(9) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性表出，则（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}x=0$ 的解均为 $\boldsymbol{B}x=0$ 的解.

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x=0$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}x=0$ 的解.

(C) $\boldsymbol{B}x=0$ 的解均为 $\boldsymbol{A}x=0$ 的解.

(D) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}x=0$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x=0$ 的解.

【答案】D

【解析】令 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由题意向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性表出，即存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$，则当 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}x_o=0$ 时，

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x_o=(\boldsymbol{BP})^{\mathrm{T}}x_o=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}x_o=0$ 恒成立，选 D .

(10) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可分别取（　　）.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】C .

【解析】

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\-1&2&-5&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&-6&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{pmatrix}$$

$=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$，则 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$；

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$，选 C .

**二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.**

（11）$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=$__________。

【答案】$\dfrac{1}{\ln 3}$

【解析】$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}x\cdot 3^{-x^2}dx=-\int_0^{+\infty}3^{-x^2}d(-x^2)\overset{t=-x^2}{=}-\int_0^{-\infty}3^t d(t)=-\dfrac{3^t}{\ln 3}\Big|_0^{-\infty}=\dfrac{1}{\ln 3}$

(12) 设函数由参数方程$\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, & x < 0 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2, & x \geq 0 \end{cases}$确定，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0} =$ ______________

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析]】由$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4te^t + 2t}{2e^t + 1}$，得$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(4e^t + 4te^t + 2)(2e^t + 1) - (4te^t + 2t)2e^t}{(2e^t + 1)^3}$，将$t = 0$

代入得$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0} = \dfrac{2}{3}$

（13）设函数$z = z(x, y)$由方程$(x+1)z + y\ln z - \arctan(2xy) = 1$确定，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)} =$ ____。

【答案】1

【解析】原方程对$x$求偏导，有：$z + (x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{1}{1+(2xy)^2} \cdot 2y = 0$ （1 式）。

将$x = 0, y = 2$代入到原方程，有：$z + 2\ln z = 1 \Rightarrow z = 1$。

将$x = 0, y = 2, z = 1$代入（1 式），有：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)} = 1$。

（14）已知函数$f(t) = \int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin\dfrac{x}{y} dy$，则$f'(\dfrac{\pi}{2}) =$______。

【答案】$\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$

【解析】由于原来的积分兑$y$好积分，故交换积分次序。

积分区域 D 为：$D = \{(x,y)\big| 1 \leq x \leq t^2, \sqrt{x} \leq y \leq t\}$，交换次序后：

$f(t) = \int_1^t dy \int_1^{y^2} \sin\dfrac{x}{y} dx = \int_1^t y(\cos\dfrac{1}{y} - \cos y)dy$，对$t$求导，有：

$f'(t) = t(\cos\dfrac{1}{t} - \cos t)$，则：$f'(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$。

（15）微分方程$y''' - y = 0$的通解$y =$________。

【答案】$y = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x), C_1, C_2, C_3 \in R$

【解析】由特征方程$\lambda^3$-1=0 得：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \lambda_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故方程的通解为：

$y = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x), C_1, C_2, C_3 \in R$。

（16）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 $x^3$ 项的系数为________。

【答案】-5

【解析】 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2x \\ 1 & x-1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 2 & -3 & 1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & x & -3 \\ 2 & -3 & 1 & x-4 \end{vmatrix}$，由特征值与特征矩阵的关系知：$x^3$ 项的系数为-5。

**三、解答题：17～22 小题,共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

（17）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)-\left(e^x-1\right)}{\sin x\left(e^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^x+1+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x+o(x^2)\right]-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}e^{x^2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

（18）（本题满分 12 分）

已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求 $f(x)$ 的凸凹性及渐近线。

【答案】凹区间：$(-\infty,-1),(0,+\infty)$，凸区间：$(-1,0)$。

渐近线：垂直渐近线：$x=-1$，斜渐近线：$y=x-1$，$y=-x-1$。

【解析】（1）因为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x}, & x>0 \\ -\dfrac{x^2}{1+x}, & x\le 0 \end{cases}$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, f''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$；

当 $x<0$ 时， $f'(x)=-\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}, f''(x)=-\frac{2}{(1+x)^3}$ ；

所以，有：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $,(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | | - | | + |
| $f(x)$ | 凹 | 拐点 | 凸 | 拐点 | 凹 |

故 $f(x)$ 凹区间： $(-\infty,-1),(0,+\infty)$ ，凸区间： $(-1,0)$ 。

（2）找垂直渐近线：因为 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x|x|}{1+x}=\infty$ ，故 $x=-1$ 为垂直渐近线。

找水平或斜渐近线：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x|x|}{(1+x)x}=\frac{x^2}{(1+x)x}=1, \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x|x|}{(1+x)}-x)=-1$，故：斜渐近为 $y=x-1$ 。

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x|x|}{(1+x)x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(1+x)x}=-1, \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x|x|}{(1+x)}+x)=1$ ，故：斜渐近为 $y=-x+1$ 。

综上有：垂直渐近线： $x=-1$ ，斜渐近线： $y=x-1, \ y=-x-1$ 。

（19）（本题满分 12 分）

$f(x)$ 满足 $\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+C$ ， $L$ 为曲线 $y=f(x)(4\le x\le 9)$ ， $L$ 的弧长为 $s$ ， $L$ 绕 $x$ 轴旋转一周所围成的曲面的面积为 $A$ ，求 $s$ 和 $A$ 。

【答案】 $s=\frac{22}{3}$ ， $A=\frac{425}{9}\pi$ 。

【解析】对 $\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+C$ 求导，有 $f(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$，进而有 $f'(x)=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})$ 。

由弧微分公式： $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\ dx$ ，故： $s=\frac{1}{2}\int_4^9(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\ dx=\frac{22}{3}$ 。

求侧面积，对 $x$ 进行微元，有： $dA=2\pi f(x)ds=2\pi(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}})[\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})]dx$ ，故有：

$A=\int_4^9 2\pi(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}})[\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})]dx=\pi\int_4^9(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1)dx=\frac{425}{9}\pi$ 。

（20）（本题满分 12 分）

函数 $y=f(x)$ 的微分方程 $xy'-6y=-6$ ，满足 $y(\sqrt{3})=10$ .

（1）求 $y(x)$ ；

（2） $P$ 为曲线 $y(x)$ 上的一点，曲线 $y(x)$ 在点 $P$ 的法线在 $y$ 轴上的截距为 $I_y$ ，为使 $I_y$ 最小，求 $P$ 的坐标。

【答案】（1） $y(x)=1+\frac{1}{3}x^6$ .（2） $\frac{11}{6}$

【解析】(1)

$$y'-\frac{6}{x}y=-\frac{6}{x}\Rightarrow y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left(\int\left(-\frac{6}{x}\right)e^{-\int\frac{6}{x}dx}dx+C\right)=1+Cx^6$$

将$y\left(\sqrt{3}\right)=10$代入，$C=\frac{1}{3},y(x)=1+\frac{1}{3}x^6$

(2)设$P(x,y)$,则过$P$点的切线方程为$Y-y=2x^5(X-x)$，法线方程为

$Y-y=-\frac{1}{2x^5}(X-x)$，令$X=0\Rightarrow Y=I_y=1+\frac{x^6}{3}+\frac{1}{2x^4}$，偶函数，为此仅考虑$(0,+\infty)$。

令$\left(I_y\right)'=2x^5-\frac{2}{x^5}=0\Rightarrow x=1$，所以

$x\in(0,1),\left(I_y\right)'<0,I_y>I_y(1)=\frac{11}{6},x\in(1,+\infty),\left(I_y\right)'>0,I_y>I_y(1)=\frac{11}{6}$，所以

$I_y(1)$的最小值为$\frac{11}{6}$

(21)（本题满分 12 分）

曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2\ (x\geq 0,y\geq 0)$与$x$轴所围成的区域为$D$，求$\iint\limits_D xydxdy$.

【答案】$\frac{1}{48}$

【解析】

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r^3\sin\theta\cos\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{16}\cos^2 2\theta d\cos 2\theta$$

$$=\frac{1}{48}$$

(22) （本题满分 12 分）

设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$仅有两个不同的特征值。若$A$相似于对角矩阵，求$a,b$的值，并求可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角矩阵。

【解析】由$\left|\lambda E-A\right|=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$，

当$b=3$时，由$A$可相似对角化知，二重跟对应的特征值有两个线性无关的特征向量。所以

$r(3E-A)=1\Rightarrow a=-1$，此时 3 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，1 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

当 b=1 时，同理可得 $r\left(E-A\right)=1\Rightarrow a=1$，1 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，3 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$。