

聊城大学 2017 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[814] 高等代数	A 卷
注意事项	1. 本试题满分150分。 2. 答题须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写。答案必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上无效。	

一、计算题(共 60 分).

1. (10 分) 计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n} =$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

2. (20 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases},$$

用其一个特解和导出组的基础解系表出全部解.

3. (10 分) 求有理系数多项式方程 $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ 的有理根.

4. (20 分) 判断矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可否对角化; 若可以对角化, 求出相应的可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

二、证明题(共 60 分).

1. (15 分) 设 $f(x), g(x)$ 是数域 F 上的多项式, 且不全为零, 若

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)),$$

证明 $(u(x), v(x)) = 1$. 其中 $(f(x), g(x))$ 为 $f(x), g(x)$ 的首系为 1 的最大公因式.

2. (15 分) 设 $B \in R^{m \times n}$, 证明 $B^T B$ 正定的充要条件是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解. 这里 B^T 为 B 的转置矩阵.

3. (20 分) 设 A 为 n 阶复矩阵, 证明: 若 $A^2 + A = 2E$, 则 A 可对角化.

4. (10 分) 设 ε 是 n 维欧式空间 V 的单位向量, 定义 V 上的线性变换

$$\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\varepsilon, \alpha)\varepsilon,$$

证明 σ 是 V 上的正交变换.

三、综合题(共 30 分).

1. (15 分) 设五阶矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $g(\lambda)$ 为 A 的最小多项式
- (1) 当 $g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ 时, 求 A 的若当标准形;
 - (2) 当 $g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ 时, 求 A 的若当标准形.
2. (15 分) 一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充要条件是二次型的秩等于 2 且符号差等于 0 或者二次型的秩等于 1.