

聊城大学2017年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[620]数学分析	B 卷
注意事项	1. 本试题满分150分。 2. 答题须用黑色字迹签字笔书写。答案必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上无效。	

一、填空题（每题4分，共20分）

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ ax + b, & x < 3 \end{cases}$ 在 $x=3$ 处可导, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 函数 $y = \ln x$ 在 $x=2$ 处的泰勒公式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题（每题10分，共70分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{k}{1+\ln x}}, k \neq 0$. 2. 设 $f(x) = x^3 e^x$, 求 $f^{(10)}(x)$.
3. 求 $\int_0^1 \arcsin x dx$.
4. 求方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 所确定的隐函数组的导数 $\frac{dz}{dx}$.
5. 求 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0)$.
6. 求 $\oiint_S y(x-z) dydz + x^2 dzdx + (y^2 + xz) dxdy$, 其中 S 是边长为 a 的立方体表面并取外侧.
7. 求 $\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, 其中 V 为由平面 $x=1, x=2, z=0, y=x$ 与 $z=y$ 所围的区域.

三、判别瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 的收敛性。（10分）

四、求函数 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点。（15分）

五、证明：连续的奇函数的一切原函数都是偶函数。（15分）

六、(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.