南京理工大学

2013年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150分

注意：(1) 认真阅读答题纸上的注意事项；(2) 所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；(3) 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空题（本题共10小题，每小题5分，共50分）

1. 多项式$f(x)$除以$(x-1)(x-2)$所得余式为__________.

2. 设A为n阶方阵，$|A|=1$，α为$n\times 1$矩阵，β为$1\times n$矩阵，且$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix}=0$，则$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & c \end{vmatrix}=$________.

3. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而向量组$\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_2+k\alpha_3, 3\alpha_3+\alpha_1$线性相关，则$k=$______.

4. 设A为n阶可逆矩阵，且A的每一行元素之和均为a，则A^{-1}的每一行元素之和均为______.

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=9x_1^2+4x_2^2+3x_3^2$在满足条件$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$下的最大值与最小值分别为________.

6. 如果$\beta=(-4,3,h)$属于由$\alpha_1(1,-1,-2),\alpha_2=(5,-4,-7),\alpha_3=(-3,1,0)$生成的子空间中的元素，则$h=$______.

7. 若单位向量α是实对称矩阵A的从属于特征值为3的特征向量，则$\alpha' A\alpha=$____.

8. 已知$\mathcal{A}$是数域P上线性空间P^3中的线性变换，且

$$\mathcal{A}(x,y,z)=(x+2y-z, y+z, x+y-2z),$$

则$\dim(\mathcal{A}^{-1}(0))=$______.

9. $\lambda-$矩阵$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$的不变因子为__________.

10. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维欧氏空间$V$的一组基，在这组基下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

若$\alpha_1+\alpha_2$与$\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_3$正交，则$k=$______.

二.（本题满分10分）证明：设$p(x)$是次数大于零的多项式，如果对于任意多项式$f(x),g(x)$，由$p(x)|f(x)g(x)$可以推出$p(x)|f(x)$ 或者$p(x)|g(x)$，则$p(x)$是不可约多项式.

三.（本题满分10分）设n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，其行列式$|A|=1$，A_{ij}表示元素a_{ij} $(i,j=1,2\cdots,n)$ 的代数余子式，且$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=3$，计算下列$n$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+3 & a_{12}+3 & \cdots & a_{1n}+3 \\ a_{21}+3 & a_{22}+3 & \cdots & a_{2n}+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+3 & a_{n2}+3 & \cdots & a_{nn}+3 \end{vmatrix}.$$

四.（本题满分10分）设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13}-2a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}-2a_{21} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33}-2a_{31} \end{pmatrix},$$

且$|A|=3$，求A^*B（A^*表示A的伴随矩阵）.

五.（本题满分10分）已知两个向量组A：$\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(1,0,1)$与$B$：$\beta_1=(-1,2,t),\beta_2=(4,1,5)$等价，求$t$的值. 并写出用向量组$B$表示向量组$A$的线性表达式.

六. (本题满分15分) 设线性方程组

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与线性方程组

$$\text{(II)}\ x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解，求a的值及(I)与(II)的所有公共解.

七. (本题满分10分) 已知A, B均为n阶正定矩阵. 证明：AB的特征值全大于0.

八. (本题满分10分) 设V是数域P上的线性空间，且$V\neq\{0\}$，证明：V不可能表示成它的两个真子空间的并集.

九. (本题满分15分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

(1) 已知A的一个特征值为1，求x；

(2) 求正交矩阵P，使得$(AP)'(AP)$为对角矩阵.

十. (本题满分10分) 已知V为欧氏空间，证明：对于V的任一线性函数$f(x)$，都存在$\alpha\in V$，使得$f(x)=(x,\alpha)$.