聊城大学 2016 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[814]高等代数	A 卷
注意事项	1. 本试题满分150 分。 2. 答题须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写。答案必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上无效。	

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 设 A 是 5 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=-1$，则 $|2A^*|=$____________.

2. 设 $\alpha=(1,2,3,2)$，$A=\alpha^T\alpha$，其中 α^T 是 α 的转置，则 $|A|=$____________.

3. 设 $A^2=2A$，则 $(E-A)^{-1}=$________，其中 E 是与 A 同阶的单位方阵.

4. 设 $A\alpha=3\alpha$，其中 α 是非零列向量，$f(x)=x^2-2x+4$，则 $f(A)\alpha=$__________ α.

5. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$，则当____$>t>$____时 f 正定.

二、计算题（第 1 题 10 分，其余每题 15 分，共 55 分）.

1. (10 分)若行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$，计算 x.

2. (15 分)问 k 取何值时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解，无解，有无穷多组解，当有无穷多解时求出通解，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (15 分)设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的不变因子、行列式因子、初等因子及 A 的 Jordan 标准形.

4. (15 分)用正交变换化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形，并写出所用的正交变换以及标准形.

三、证明题（每题 15 分，共 60 分）.

1. (15 分)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 为 $s+1$ 个 n 维向量，并且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s(s>1)$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ ~~线性无关，则~~ $\cancel{\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s}$ ~~线性无关.~~

2. (15 分)设 σ,τ 是数域 F 上线性空间 V 上的线性变换，$Ker\sigma,Ker\tau$ 分别表示 σ,τ 的核，且 $\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$，若 $Ker\sigma=Ker\tau$，则 $\sigma\tau=\sigma,\tau\sigma=\tau$.

3. (15 分)设 A 为 n 阶矩阵，若 $A^2=A$，证明 A 可以对角化.

4. (15 分)设 V 是一 n 维欧氏空间，$\alpha\neq 0$ 是 V 中一固定向量. 证明：
   (1) $W=\{x|(x,\alpha)=0,x\in V\}$ 是 V 的子空间；
   (2) W 的维数等于 $n-1$.

四、综合题（共 15 分）.

1．(15 分) 设V是 2 阶实方阵所构成的线性空间．任意$A\in V$有$\sigma(A)=2A^T-A$，其中A^T表示A的转置．证明

(1) σ是V的线性变换.

(2) 求σ在基

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

下的矩阵.