聊城大学 2016 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[620]数学分析	B 卷
注意事项	1. 本试题满分150 分。 2. 答题须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写。答案必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上无效。	

一、选择题（每题 5 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分条件是（ ）

（A） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.　　（B） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在.

（C） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ 存在.　　（D） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

2. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则( )

（A） $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　（B） $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(0)>f'(1)>f(1)-f(0)$

3. 设 $f'(x_0)=4$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=$（ ）.

（A）4　（B）-4　（C）8　（D）-8

4. 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\big|-a\le x\le a,x\le y\le a\}$， $D_1=\{(x,y)\big|0\le x\le a,x\le y\le a\}$，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$（ ）.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$　(B) $2\iint\limits_{D_1} xydxdy$　(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　(D) 0

二、计算题 （每题 7 分，共 70 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. 求由参量方程 $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

4. 已知 $y=\sin 5x+x^2$，求 dy.

5. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}$　$(a>0)$.

6. 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

7. 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值点与极值.

8. 应用高斯公式计算 $\oiint\limits_S yzdydz+zxdzdx+xydxxy$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

9. 求 $\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为任一不包含原点的闭区域的边界线.

10. 求方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 所确定的隐函数组的导数 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

三、（10 分）判别函数项级数 $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

四、（15 分）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可导，$f(a)=0$. 证明存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

五、（15 分）证明幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$，并求其和函数.

六、（20 分）

1. 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\,dt \quad (n=1,2,\cdots)$ 的大小，并说明理由；

2. 记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt \quad (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.