聊城大学 2015 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[814] 高等代数	A卷
适用专业	基础数学|应用数学|系统理论|系统分析与集成|系统科学	

注意事项：1、本试题共 6 道大题（共 10 个小题），满分 150 分。
2、本卷为试题，答题另有答题纸。答案一律写在答题纸上，写在该试题纸上或草稿纸上无效。
3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写，其它均无效。
4、特殊要求携带的用具请注明，没有特殊要求填“无” 无

一、(20 分) 设多项式 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 满足 $(f_1(x), g_1(x))=1, (f_2(x), g_2(x))=1,$

$(f_1(x), g_2(x))=1, (f_2(x), g_1(x))=1.$

证明 $(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x))=(f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x))$.

二、(30 分)计算下列行列式

1. (15 分) 设 $a_i+b_j\neq 0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$.

2. (15 分) 设 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n+1)$. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

三、(30 分)

1. (15 分) 设 A 与 B 为 n 阶矩阵. 证明：如果 $AB=O$，则 秩（A）+ 秩（B）$\leq n$.

2. (15 分) 设 n 阶矩阵 A 与 B 满足 $A^3=2E, B=A^2-2A+2E$. 证明矩阵 B 可逆，并求 B 的逆矩阵.

四、（30 分）

1. (15 分) a, b 取何值时，方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+2x_3=1 \\ ax_1+(2b-1)x_2+3x_3=1 \\ ax_1+bx_2+(b+3)x_3=2b-1 \end{cases}$

有解？并在有解的情况下求其解.

2. (15 分) 设 $f_1(x)$， $f_2(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ 是 n-1 个多项式（$n \geq 2$）. 证明：如果多项式 $f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)$ 能被 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ 整除，则每个 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 的所有系数之和都等于零.

五、(20 分) 用正交变换 $x=Py$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 为标准形.

六、(20 分) 设 $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in F, 1\leq i\leq n\}$ 为数域 F 上的线性空间，在 V 中定义变换 T 为： $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}), \forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V$.

1. (10 分) 证明 T 是 V 的一个线性变换.

2. (10 分) 求变换 T 的核 $T^{-1}(0)$ 及 $T^{-1}(0)$ 的一组基.