

聊城大学 2015 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[620] 数学分析	A 卷
适用专业	基础数学 应用数学 系统理论 系统分析与集成 系统科学	

注意事项: 1、本试题共 8 道大题 (共 13 个小题), 满分 150 分。
 2、本卷为试题, 答题另有答题纸。答案一律写在答题纸上, 写在该试题纸上或草稿纸上无效。
 3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写, 其它均无效。
 4、特殊要求携带的用具请注明, 没有特殊要求填“无” 无

一、叙述数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的 $\varepsilon - N$ 定义, 并由此证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. (10 分)

二、计算题 (每题 8 分, 共 40 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \frac{1}{1+x^n}$

2. 计算 $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

3. 求由参量方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

4. 计算 $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 V 是以曲面 $2(x^2 + y^2) = z$ 与 $z = 4$ 为界面的区域.

5. 求方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 所确定的隐函数组的导数 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

三、若 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续. (15 分)

四、设 $a > 0, k > 0, a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$, 一般地, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n}), n = 1, 2, \dots$. 证明数列 $\{a_n\}$

极限存在且等于 \sqrt{k} . (15 分)

五、证明积分 $\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ 与路线无关, 并求

$(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ 的一个原函数. (15 分)

六、确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域, 并求其和函数. (15 分)

七、证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 连续且偏导数存在, 但在 $(0, 0)$ 不可

微. (20 分)

八、证明: 若 $x > 0$, 则

(1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$. (20 分)