聊城大学 2014 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[813]高等代数	A 卷
注意事项	1. 本试题满分150 分。 2. 答题须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写。答案必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上无效。	

一、计算题（每题 15 分，共 60 分）.

1.（15 分）计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-y & y & y & \cdots & y & y \\ y & x-y & y & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x-y & y \\ y & y & y & \cdots & y & x-y \end{vmatrix}.$$

2.（15 分）求向量组

$$\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),$$
$$\alpha_3=(3,0,7,4),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_4=(2,1,5,6)$$

的一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表示.

3.（15 分）设三维线性空间 V 上的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

求 σ 在基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵.

4.（15 分）设复矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

求（1）A 的各阶行列式因子；（2）A 的各阶不变因子；（3）A 的最小多项式；

（4）A 的初等因子组；（5）A 的 Jordan 标准形.

二、证明题（每题 15 分，共 60 分）.

1.（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为一组 n 维向量，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为任一 n 维向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

2.（15 分）设 $f(x),g(x)$ 为数域 F 上的多项式，$a,b,c,d\in F$，且 $ad-bc\neq 0$，证明

$$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x)).$$

3.（15 分）设线性空间 F^n，$A\in F^{n\times n}$，且 $A^2=A$. 令子空间

$$W_1=\{x\mid Ax=0,x\in F^n\},\qquad W_2=\{x\mid Ax=x,x\in F^n\},$$

证明 $F^n=W_1\oplus W_2$.

4.（15 分）设n阶矩阵A可逆，则

（1）若λ是A的特征值，则$\dfrac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值；

（2）若λ是A的特征值，则$\dfrac{|A|}{\lambda}$是A^{*}（A的伴随矩阵）的特征值.

三、综合题（每题 15 分，共 30 分）.

1.（15 分）设σ为欧式空间V上的正交变换.

（1）求σ的实特征值；

（2）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$上的标准正交基，则$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$也是$V$的一个标准正交基.

2.（15 分）设$A\in F^{m\times r}$，则A列满秩（A的秩为r）的充要条件是存在可逆矩阵$P\in F^{m\times m}$，使

$$A=P\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix},$$

其中E_r是r阶单位矩阵.