聊城大学2014年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[618]数学分析	A卷
注意事项	1. 本试题满分150分。 2. 答题须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写。答案必须写在答题纸上，写在试题或草稿纸上无效。	

一、计算题 （每题8分，共40分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}$.

2. 设 $g(0)=g'(0)=0$， $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ，求 $f'(0)$.

3. 计算 $\int \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$.

4. 求函数组 $\begin{cases} x=u+v \\ y=u^2+v^2 \\ z=u^3+v^3 \end{cases}$ 所确定的反函数组的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5. 计算 $\oiint\limits_S y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy$，其中 S 是边长为 a 的立方体表面并取外侧.

二、简答题（每题10分，共30分）

1. 判别函数项级数 $\sum \dfrac{x^n}{(n-1)!}$ 在 $[-r,r]$ 上的一致收敛性.

2. 判别无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

3. $f(x,y)=3axy-x^3-y^3$ $(a>0)$ 是否存在极值点.

三、证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$\int_a^b f(x)dx=0$，则 $f(x)\equiv 0$.（15分）

四、证明：若 f 是以 2π 为周期的连续函数，则存在 ξ，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$.（15分）

五、证明幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$，并求其和函数 $s(x)$.（15分）

六、证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但在 $(0,0)$ 不可微.（15分）

七、证明题（20分）

1. 叙述并证明罗尔中值定理；

2. 若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.