安徽师范大学

2019 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码： 891

科目名称： 高等代数

一、(15 分) 设m,n,p是正整数，证明：x^2+x+1整除$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$.

二、(15 分) 设$f(x)$与$g(x)$是数域P上的两个互素的多项式，k是正整数. 证明：

$$\left(f(x^k),g(x^k)\right)=\left(f^k(x),g^k(x)\right).$$

三、(15 分) 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

四、(15 分) 设A,B为两个$m\times n$矩阵，证明：A的行向量组与B的行向量组等价的充分必要条件是线性方程组$AX=0$与$BX=0$同解.

五、(15 分) 设A为n阶方阵，证明：$A^2=A$的充分必要条件是秩(A)+秩$(A-E)=n$.

六、(20 分) 设V是数域P上的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$是$V$的一组基，$V$的线性变换$f$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1、 分别求出f的值域$f(V)$与核$f^{-1}(0)$的维数及一组基；

2、判断$V=f(V)+f^{-1}(0)$是否成立？并说明理由.

七、(20分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$. 已知 A 与对角矩阵相似，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，求：

1、x,y 的值；

2、可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

八、(20分) 设3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$，求：

1、A 的行列式因子、不变因子及初等因子；

2、A 的最小多项式及若尔当(Jordan)标准形.

九、(15分) 设 n 阶实数方阵 A 是反对称的(即 A 的转置 $A^T=-A$)，E 为 n 阶单位矩阵，证明：

1、A 的特征值的实部一定是零；

2、矩阵 $E-A^2$ 是正定矩阵.