安徽师范大学

2019 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码：615

科目名称：高等数学Ⅰ

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分，把答案填在答题纸上）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\geq 0 \\ e^{3x}-x, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则常数 $a=$________.

2. 函数 $f(x)=\int_1^x (t-1)e^t \mathrm{d}t$ 的极小值点为________.

3. 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$，$x=2$ 所围成图形的面积为________.

4. 设连续函数曲线 $y=f(x)$ 与 $y=e^x-1$ 在原点相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{3}{n}\right)=$________.

5. 二阶线性微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解为________.

6. 已知 $f(x)$ 在区间 $[0,\ 1]$ 连续，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\arctan x$，则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$________.

7. 一阶微分方程 $(y^2-2x)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$ 的通解为________.

8. $\int_{-\pi}^{\pi}(t+\sin t+1)\cos^2 t\,\mathrm{d}t=$________.

9. 设 A 是3阶方阵，A^* 和 A^{-1} 分别为 A 的伴随矩阵和逆矩阵，A 的行列式 $|A|=2$，则行列式 $\left|\frac{1}{2}A^*+A^{-1}\right|=$________.

10. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} |x|, & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 则数学期望 $E(X^2+\sin X)=$________.

二、（本题 10 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

三、（本题 10 分）求函数 $z=3+x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$ 的极值点.

四、（本题 10 分）证明：当 $x>0$ 时， $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$.

五、（本题 15 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{xe^{x^2+y^2}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中 $D: x^2+y^2\le 1,\ x>0,\ y>0$.

六、（本题 15 分）设 $t>0$ 时，$f(t)$ 有二阶连续导数，$z=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^2y^2$，求 $f(t)$（$t>0$）.

七、（本题 15 分）已知齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3-6x_4=0 \end{cases} \text{与}\ (II)\begin{cases} 3x_1+ax_2+x_3-2x_4=0, \\ 2x_2-5x_3+(a-1)x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

有非零公共解，求 a 的值及其所有公共解.

八、（本题 15 分）已知三阶矩阵 A 第一行的 3 个元素分别是 $3,-1,-2$， 又 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 的三个特征向量，求矩阵 A.

九、（本题 15 分）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \dfrac{1}{2}, & -1\le x<1, \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$ 令 $Y=X^2$，证明：X 与 Y 不相关.

十、（本题 15 分）设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$ 上的均匀分布，求矩阵 $A=\begin{pmatrix} X & 2 & 3 \\ 1 & Y & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵的概率.