

安徽师范大学

2018 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 615

科目名称: 高等数学 I

一、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分, 把答案填在答题纸上)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{x \ln(1+x^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \geq 0 \\ (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{2017}}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成图形绕 y 轴旋转一周的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 过点 $(3, 0)$ 与曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 相切的直线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 连续, 且 $\int_0^x f(t) dt = \arctan x$, 则 $\int_0^1 xf(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 二阶线性微分方程 $y'' + y' - 2y = -2x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 曲线 $f(x) = \arctan x$ 的拐点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 A 是 4 阶方阵, A^* 和 A^{-1} 分别为 A 的伴随矩阵和逆矩阵, A^* 的行列式 $|A^*| = 8$, 则行列式

$|A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则方差 $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、(本题 10 分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + a$ 在区间 $[-1, 2]$ 的最小值为 3, 求常数 a 的值.

三、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0$ ，证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

四、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x) - \int_0^x f(t)dt = e^x$ ，求 $f(x)$ 。

五、（本题 15 分）计算二重积分 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy$ ，其中 D 由 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=4$ 与直线 $y=x$ ， $y=0$ 在第一象限所围的区域。

六、（本题 15 分）设 $F(u, v)$ 具有二阶连续偏导数， a, b, c 为常数，若 $aF'_u(u, v) + bF'_v(u, v) \neq 0$ ，

证明：由方程 $F(cx+az, cy+bz) = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 满足

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c = 0.$$

七、（本题 15 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$ ，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，求矩阵 X 。

随矩阵，求矩阵 X 。

八、（本题 15 分）设 A 为 $n \times m$ 阶矩阵， B 为 $m \times n$ 阶矩阵。证明：方阵 AB 与 BA 有相同的非零特征值。

九、（本题 15 分）设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & 0 < x < 1, -x < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明： X 与 Y 不相关，但 X 与 Y 不是相互独立的。

十、（本题 15 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 令 $Y = \begin{cases} X, & X \geq 0, \\ X^2, & X < 0. \end{cases}$

求数学期望 $E(XY)$ 。