安徽师范大学

2017 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码： 891

科目名称： 高等代数

一、(15 分) 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，a_1,a_2,a_3,a_4 为互不相同的四个整数．若

$f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=f(a_4)=1$，证明：对于任意整数 n，$f(n)-1$ 一定不为素数．

二、(15 分) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个互不相同的实数，$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 为 n 个次数不超过

$n-2$ 的实系数多项式，计算 n 阶行列式

$$\mathrm{D}_n=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}.$$

三、(15 分) 设 E 为 n 阶单位矩阵，A 为 n 阶实方阵，且满足 $A^2+2A+2E=0$．

1、(10 分) 证明：对于任意实数 a，方阵 $A+aE$ 都是可逆矩阵．

2、(5 分) 将 $A+3E$ 的逆矩阵表示为 A 的多项式．

四、(20 分) 设 A 为 3 阶实方阵，实数 a 满足线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6 \\ -x_1-2x_2+ax_3=-3 \end{cases}$ 有无穷多个解，

且 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a\\a+3\\a+2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{pmatrix}$ 为 A 的分别属于三个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$ 的特征向量．求：

1、(15 分) 矩阵 A；

2、(5 分) 行列式 $|A^{2017}+2E|$．

考生请注意：答案必须写在答题纸上，写在本试题纸上的无效！

五、(20分) 已知向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}(m\geq 2)$线性相关，向量组$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关．证明：

1、(10分) α_1可以由$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出，且表出方式是惟一的；

2、(10分) α_m不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表出．

六、(15分) 设f,g为线性空间V的线性变换，且$f^2=f,g^2=g$．证明：f与g有相同的核的充分必要条件是$fg=f$且$gf=g$．

七、(20分) 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$可以经过正交线性替换化为$3y_1+3y_2^2+by_3^2$．

1、(10分) 求a,b的值，并判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)$是否为正定二次型；

2、(10分) 写出所作的正交线性替换．

八、(15分) 设A,B为n阶实方阵，证明：

1、(10分) 秩$(AB)\geq$秩$(A)+$秩$(B)-n$；

2、(5分) 若存在正整数k，使得$A^k=0$（即A为幂零阵），则秩$(A)\leq\dfrac{n(k-1)}{k}$．

九、(15分) 设A为复数域上的n阶方阵，证明：存在两个对称矩阵A_1和A_2，使得$A=A_1A_2$．