

安徽师范大学

2017 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 615

科目名称: 高等数学 I

一、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分, 把答案填在答题纸上)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(1 + \cos x) \ln(1 + x)} =$ _____.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 0 \\ e^{2x} - x, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则常数 $a =$ _____.

3. $\int \frac{(1 + \ln x)^{2016}}{x} dx =$ _____.

4. 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$, $x = 2$ 所围成图形的面积为 _____.

5. 设连续函数曲线 $y = f(x)$ 与 $y = e^x - 1$ 在原点相切, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{3}{n}\right) =$ _____.

6. 已知 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 2$, $f(1) = 2$, 则 $\int_0^1 x f'(x) dx =$ _____.

7. 一阶线性非齐次微分方程 $y' + y \tan x = \cos x$ 的通解为 _____.

8. 函数 $f(x) = \int_1^x (t-1)e^t dt$ 的极小值点为 _____.

9. 设 A 是 3 阶方阵, A^* 和 A^{-1} 分别为 A 的伴随矩阵和逆矩阵, A 的行列式 $|A| = \frac{1}{2}$, 则行列式

$$|A^* + A^{-1}| = \text{_____}.$$

10. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $E(X^2 \sin X) =$ _____.

二、(本题 10 分) 试确定 a 值, 使 $f(x) = xe^{ax}$ 在 $x=1$ 处有极值, 并求此极值.

考生请注意: 答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸上的无效!

三、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$.

四、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) < 2$, 证明: 方程 $3x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根.

五、(本题 15 分) 计算二重积分 $I = \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, 其中 D 由 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $x^2 + y^2 = 4$ 与

直线 $y = x$, $y = 0$ 在第一象限所围的区域.

六、(本题 15 分) 设 $z = f(x, y)e^{ax+by}$, 其中 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$,

求常数 a, b , 使得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

七、(本题 15 分) 设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

八、(本题 15 分) 设 n 阶矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, α 为 n 维非零列向量, α^T 为 α 的转置.

(1) 试证: $A^2 = A$ 的充要条件是 $\alpha^T \alpha = 1$. (2) 试证: 当 $\alpha^T \alpha = 1$ 时, A 不可逆.

九、(本题 15 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < y < 1, y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (1) (X, Y) 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$; (2) 在 $(Y = \frac{1}{2})$ 的条件下, X 的条件密

度函数 $f_{X|Y}(x | \frac{1}{2})$.

十、(本题 15 分) 独立地掷一枚均匀的硬币, X 表示“直到正反面都出现时为止, 硬币投掷的总次数”, 求 X 的数学期望 $E(X)$.