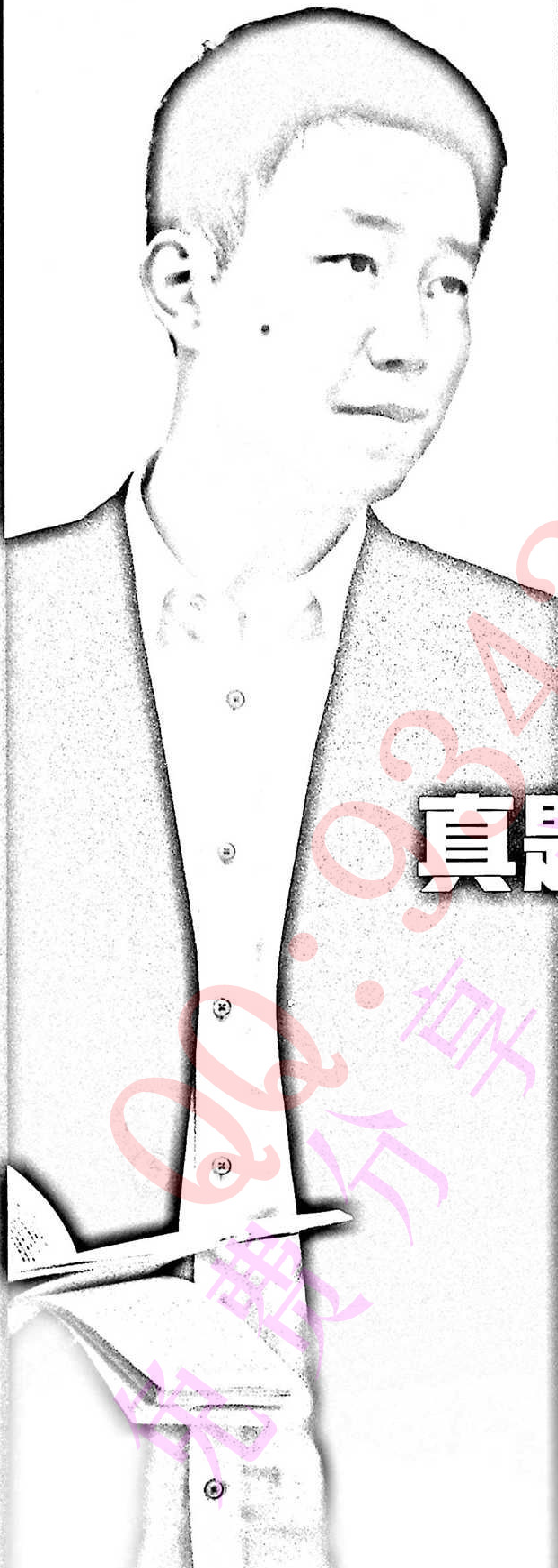
张宇数学教育系列丛书



2018

张宇考研数学真题大全解

试卷分册·数学三

主编○张宇　副主编○高昆轮

刮涂层 查真伪

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷Ⅳ，Ⅴ均为现在的数学三.

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_______ 分数_______

（试卷Ⅳ）

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$.　（　）　P9,12 题

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \mathrm{d}x = 0$.　（　）　P63,1 题

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散.　（　）　P114,1 题

(4) 假设 D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式，且 $D\neq 0$，但含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0.　（　）　P162,30 题

(5) 连续型随机变量取任何给定实数值的概率等于 0.　（　）　P245,1 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

(1) 下列函数在其定义域内连续的是　P23,68 题

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$.　(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$　(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$　(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $a<x_1<x_2<b$，则至少存在一点 ξ，使得　P60,117 题

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$.

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)(x_1<\xi<b)$.

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)(x_1<\xi<x_2)$.

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)(a<\xi<x_2)$.

(3) 下列广义积分收敛的是　P72,39 题

(A) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.　(B) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.　(C) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$.　(D) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

(4) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，那么在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中　P179,28 题

(A) 必有 r 个行向量线性无关.

(B) 任意 r 个行向量都线性无关.

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组.

(D) 任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表示.

(5) 若两事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则　P234,1 题

(A) A 和 B 不相容（互斥）.　(B) AB 是不可能事件.

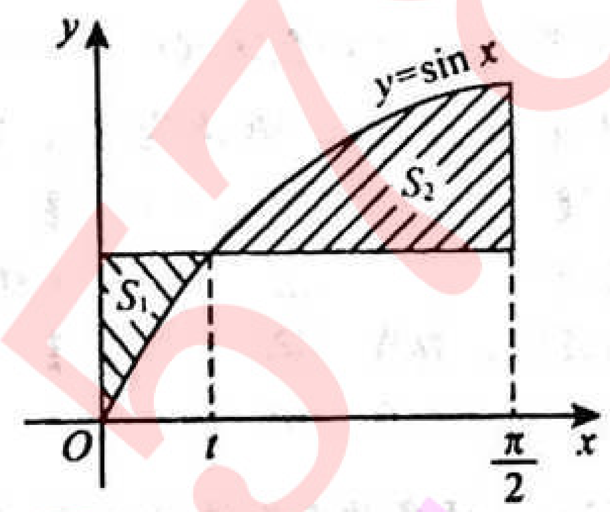
(C) AB 未必是不可能事件.　(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

三、计算下列各题(每小题 4 分,满分 16 分)

(1)求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.　P9,13 题　　(2)已知 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$,求 y'.　P32,15 题

(3)$z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$,求 dz.　P86,4 题　　(4)求不定积分$\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$.　P65,7 题

四、(本题满分 10 分)



考虑函数 $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 问:

(1)t 取何值时,右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和$S=S_1+S_2$最小?

(2)t 取何值时,面积 $S=S_1+S_2$ 最大?　P76,49 题

五、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$展开成 x 的幂级数,并指出收敛区间.

P128,36 题

六、(本题满分 5 分)

计算二重积分$\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$,其中 D 是第一象限中由直线 $y=x$ 和 $y=x^3$ 围成的封闭区域.　P105,14 题

七、(本题满分 6 分)

已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta=-3p^3$,而市场对该商品的最大需求量为 1(万件). 求需求函数.

P37,41 题

八、(本题满分 8 分)

解线性方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4,\\x_1+x_3-x_4=-3,\\3x_1+x_2+x_3=1,\\7x_1+7x_3-3x_4=3.\end{cases}$　P184,8 题

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 A 和 B 满足 $AB=A+2B$,求矩阵 B,其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$.　P160,24 题

十、(本题满分 6 分)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\0&-1&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 的实特征值及对应的特征向量.　P200,1 题

十一、(本题共 2 小题,每小题 4 分,满分 8 分)

(1)已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2,P\{X=2\}=0.3,P\{X=3\}=0.5$,试写出 X 的分布函数 $F(x)$.

P246,6 题

(2)已知随机变量 Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{a^2}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y>0,\\0, & y\leqslant 0,\end{cases}$ 求随机变量 $Z=\dfrac{1}{Y}$的数学期望 EZ.　P279,1 题

十二、(本题满分 8 分)

假设有两箱同种零件:第一箱内装 50 件,其中 10 件一等品;第二箱内装 30 件,其中 18 件一等品. 现从两箱中随意挑出一箱,然后从该箱中先后随机取两个零件(取出的零件均不放回). 试求:

(1)先取出的零件是一等品的概率 p;

(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q. P237,12 题

（试卷Ⅴ）

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ　第一、(2)题】

(3)若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上严格单增，则对区间 (a,b) 内任何一点 x 有 $f'(x)>0$. （　　） P43,65 题

(4)若 A 为 n 阶方阵，k 为常数，且 $|A|$ 和 $|kA|$ 为 A 和 kA 的行列式，则 $|kA|=k|A|$. （　　） P146,9 题

(5)【同试卷Ⅳ　第一、(5)题】

二、选择题（每小题 2 分，满分 10 分）

(1)【同试卷Ⅳ　第二、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ　第二、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第二、(3)题】

(4)【同试卷Ⅳ　第二、(4)题】

(5)对于任意两个事件 A 和 B，有 $P(A-B)=$ P237,13 题

(A) $P(A)-P(B)$.

(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$.

(C) $P(A)-P(AB)$.

(D) $P(A)-P(\overline{B})-P(A\overline{B})$.

三、计算下列各题（每小题 4 分，满分 20 分）

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$. P9,14 题

(2)【同试卷Ⅳ　第三、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第三、(3)题】

(4)计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}\,dx$. P68,22 题

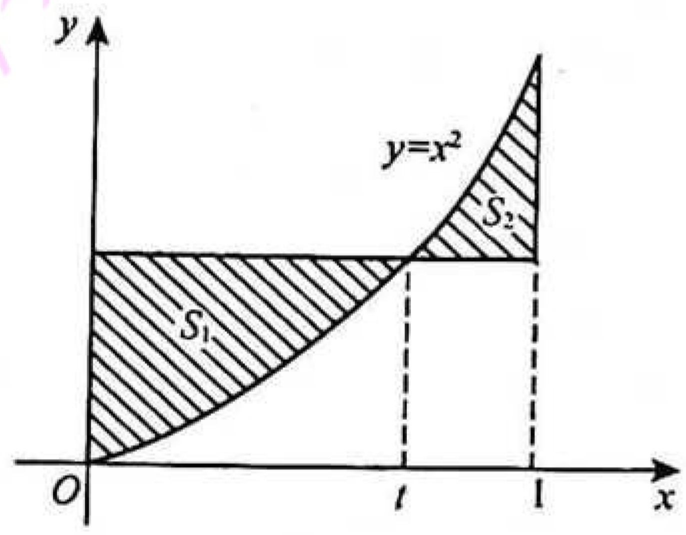
(5)求不定积分 $\int\dfrac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$. P65,8 题

四、（本题满分 10 分）

考虑函数 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$. 问：

(1) t 取何值时，右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小？

(2) t 取何值时，面积 $S=S_1+S_2$ 最大？ P76,50 题



五、（本题满分 5 分）【同试卷Ⅳ　第六题】

六、（本题满分 8 分）

设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$，而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$，其中 x 为产量（假定等于需求量），p 为价格，试求：

(1)边际成本；(2)边际收益；(3)边际利润；(4)收益的价格弹性. P37,42 题

七、（本题满分 8 分）【同试卷Ⅳ　第八题】

八、（本题满分 7 分）【同试卷Ⅳ　第九题】

九、（本题满分 6 分）【同试卷Ⅳ　第十题】

十、（本题满分 8 分）

已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2$，$P\{X=2\}=0.3$，$P\{X=3\}=0.5$，试写出 X 的分布函数 $F(x)$，并求 X 的数学期望与方差. P280,2 题

十一、（本题满分 8 分）【同试卷Ⅳ　第十二题】

答案速查(试卷Ⅳ)

一、判断题

(1)×. (2)√. (3)×. (4)√. (5)√.

二、选择题

(1)(A). (2)(C). (3)(C). (4)(A). (5)(C).

三、(1)e. (2)$\dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$. (3)$\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. (4)$(\sqrt{2x-1}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}+C$,其中 C 为任意常数.

四、(1)当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时,面积 $S=S_1+S_2$ 最小; (2)当 $t=0$ 时,面积 $S=S_1+S_2$ 最大.

五、$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$,其收敛区间为$(-1,1)$. 六、$\dfrac{\mathrm{e}}{2}-1$. 七、$x=\mathrm{e}^{-t^2}$.

八、$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-k\\-8+2k\\k\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-8\\0\\6\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数). 九、$B=\begin{bmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{bmatrix}$.

十、实特征值 $\lambda=1$,特征向量为 $k(0,2,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意非零常数.

十一、(1)$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\0.2, & 1\leqslant x<2,\\0.5, & 2\leqslant x<3,\\1, & x\geqslant 3.\end{cases}$ (2)$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a}$. 十二、(1)$\dfrac{2}{5}$. (2)0.48557.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、判断题

(1)略. (2)略. (3)×. (4)×. (5)略.

二、选择题

(1)略. (2)略. (3)略. (4)略. (5)(C).

三、(1)1. (2)略. (3)略. (4)1. (5)$\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{x^2+1}{2}+C$,其中 C 为任意常数.

四、(1)当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时,$S=S_1+S_2$ 最小; (2)当 $t=1$ 时,$S=S_1+S_2$ 最大. 五、略.

六、(1)$3+x$. (2)$\dfrac{50}{\sqrt{x}}$. (3)$\dfrac{50}{\sqrt{x}}-3-x$. (4)-1. 七、略. 八、略. 九、略.

十、$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\0.2, & 1\leqslant x<2,\\0.5, & 2\leqslant x<3,\\1, & x\geqslant 3;\end{cases}$ $EX=2.3$;$DX=0.61$. 十一、略.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅳ）

一、填空题(本题满分 10 分,每空 1 分)

(1)设 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t,-\infty<x<+\infty$,则 P73,41 题

①$f'(x)=$________; ②$f(x)$的单调性是________;

③$f(x)$的奇偶性是________; ④其图形的拐点是________;

⑤凹凸区间是________; ⑥水平渐近线是________.

(2) $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=$________. P142,1 题

(3)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________. P154,6 题

(4)设 $P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.7$,那么

①若 A 与 B 互不相容,则 $P(B)=$________;

②若 A 与 B 相互独立,则 $P(B)=$________. P241,32 题

二、(本题满分 10 分,每小题 2 分)

(1)若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$都存在,则极限$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在. ( ) P6,6 题

(2)若 x_0 是函数 $f(x)$的极值点,则必有 $f'(x_0)=0$. ( ) P44,66 题

(3)等式 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$ 对任何实数 a 都成立. ( ) P69,23 题

(4)若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零方阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的秩必小于 n. ( ) P163,31 题

(5)若事件 A,B,C 满足等式 $A\cup C=B\cup C$,则 $A=B$. ( ) P234,2 题

三、(本题满分 16 分,每小题 4 分)

(1)求极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$. P9,15 题

(2)已知 $u+e^u=xy$,求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$. P91,27 题

(3)求定积分$\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$. P69,24 题

(4)求二重积分$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$. P102,5 题

四、(本题满分 6 分，每小题 3 分)

(1)讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性. P114,2 题

(2)已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛. P115,3 题

五、(本题满分 8 分)

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数：

$$D=D(p)=\frac{a}{p^2},S=S(p)=bp,$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$ 为常数；价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=k[D(p)-S(p)](k\text{ 为正的常数}).$$

假设当 $t=0$ 时价格为 1，试求：

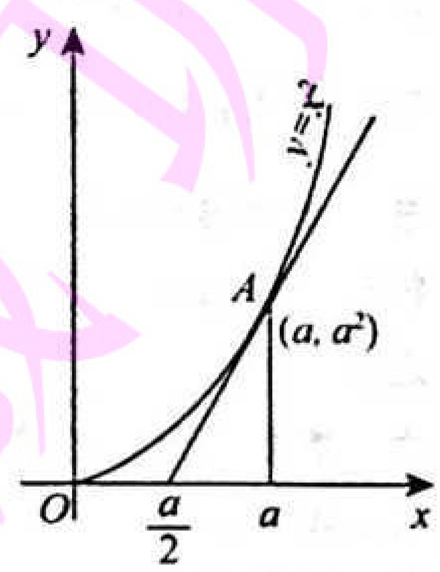
(1)需求量等于供给量时的均衡价格 p_e；

(2)价格函数 $p(t)$；

(3)极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)$. P136,26 题

六、(本题满分 8 分)

在曲线 $y=x^2(x\geqslant0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形(如右图)的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：



(1)切点 A 的坐标；

(2)过切点 A 的切线方程；

(3)由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积. P77,51 题

七、(本题满分 8 分)

已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3,\\3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3,\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2.\end{cases}$

问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解的情形下，试求出一般解.

P184,9 题

八、(本题满分 8 分)

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant2)$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$. 试讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性. P167,1 题

九、(本题满分 7 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，求行列式 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$ 的值. P146,10 题

十、(本题满分 7 分)

玻璃杯成箱出售，每箱 20 只. 假设各箱含 0,1,2 只残次品的概率相应为 0.8,0.1 和 0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看 4 只：若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回. 试求：

(1)顾客买下该箱的概率 α；

(2)在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β. P237,14 题

十一、(本题满分 6 分)

某保险公司多年统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向

保险公司索赔的户数.

(1)写出 X 的概率分布;

(2)利用棣莫弗-拉普拉斯定理,求出被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值. P289,1 题

十二、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 在区间(1,2)上服从均匀分布. 试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度 $f(y)$. P253,29 题

(试卷Ⅴ)

一、(本题满分 12 分)【同试卷Ⅳ 第一题】

二、(本题满分 10 分)【同试卷Ⅳ 第二题】

三、(本题满分 16 分,每小题 4 分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$. P9,16 题

(2)已知 $u=e^{\frac{x}{y}}$,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$. P86,5 题

(3)【同试卷Ⅳ 第三、(3)题】 (4)【同试卷Ⅳ 第三、(3)题】

四、(本题满分 6 分)

确定常数 a 和 b,使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1,\\ x^2, & x\leqslant1\end{cases}$ 处处可导. P34,26 题

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段,一段围成正方形,另一段围成圆形. 问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小? P44,67 题

六、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ 第七题】

八、(本题满分 6 分)

已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 给定,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵. 证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆,并求出其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$. P155,7 题

九、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第八题】

十、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第十题】

十一、(本题满分 7 分)

假设有十只同种电器元件,其中有两只废品. 装配仪器时,从这批元件中任取一只,如是废品,则扔掉重新任取一只. 试求在取到正品之前,已取出的废品只数的概率分布、数学期望和方差. P280,3 题

十二、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第十二题】

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题

(1)①$e^{-\frac{1}{2}x^2}$；②在$(-\infty,+\infty)$上单调增；③奇函数；④$(0,0)$；⑤在$(-\infty,0)$上凹，在$(0,+\infty)$上凸；

⑥$y=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，$y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.　(2)-3.　(3)$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.　(4)①0.3；②0.5.

二、(1)×.　(2)×.　(3)×.　(4)√.　(5)×.

三、(1)1.　(2)$\frac{1}{1+e^u}-\frac{xye^u}{(1+e^u)^3}$.　(3)$\frac{2\pi}{3}$.　(4)$\frac{1}{2}$.

四、(1)级数收敛，证明略.　(2)证明略.

五、(1)$p_e=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$；　(2)$p(t)=[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}$；　(3)$p_e$.

六、(1)(1,1)；　(2)$y=2x-1$；　(3)$V=\frac{\pi}{30}$.

七、①$k_1\neq2$时，方程组有唯一解；②$k_1=2$，且$k_2\neq1$时，方程组无解；③$k_1=2$，且$k_2=1$时，方程组有无穷多组解，取$x_3=c$(c为任意常数)，则方程组的一般解可表示为

$$x_1=-8,x_2=3-2c,x_3=c,x_4=2.$$

八、①若s为奇数，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关；②若$s$为偶数，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关.

九、$-\frac{16}{27}$.　十、(1)$\alpha\approx0.94$.　(2)$\beta=0.85$.

十一、(1)$P\{X=k\}=C_{100}^k0.2^k0.8^{100-k}(k=0,1,\cdots,100)$.　(2)0.927.

十二、$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

答案速查(试卷Ⅴ)

一、略.　二、略.　三、(1)$\frac{4}{\pi}$.　(2)$-\frac{x+y}{y^3}e^{\frac{x}{y}}$.　(3)略.　(4)略.　四、$a=2,b=-1$.

五、圆的周长为$\frac{\pi a}{4+\pi}$，正方形的周长为$\frac{4a}{4+\pi}$.　六、略.　七、略.　八、证明略，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.　九、略.

十、略.　十一、(1)$P\{X=0\}=\frac{4}{5}$，$P\{X=1\}=\frac{8}{45}$，$P\{X=2\}=\frac{1}{45}$.　(2)$EX=\frac{2}{9}$.　(3)$DX=\frac{88}{405}$.

十二、略.

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_______ 分数_______

（试卷Ⅳ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是_______. P35,33 题

(2)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是_______. P120,17 题

(3)若齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是_______. P148,24 题

(4)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 则 $A=$_______，$P\{|X|<\frac{\pi}{6}\}=$_______. P249,13 题

(5)设 X 为随机变量且 $EX=\mu,DX=\sigma^2$. 则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant$_______. P289,2 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时 P19,57 题

(A) $f(x)$ 是 x 的等价无穷小. (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小.

(C) $f(x)$ 是比 x 更高阶的无穷小. (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小.

(2)在下列等式中，正确的结果是 P65,9 题

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$. (B) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$. (C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$. (D) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 P168,2 题

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行（列）的元素对应成比例.

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合.

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行（列）的元素全为 0.

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 矩阵，则必有 P146,11 题

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$. (B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. (C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$. (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

(5)以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\bar{A}$ 为： P234,3 题

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”. (B)“甲、乙两种产品均畅销”.

(C)“甲种产品滞销”. (D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$. P9,17 题

(2)已知 $z=f(u,v)$，$u=x+y$，$v=xy$，且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. P88,15 题

(3)求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的通解. P133,12 题

四、(本题满分 9 分)

设某厂家打算生产一批商品投放市场，已知该商品的需求函数为 $p=p(x)=10e^{-\frac{x}{2}}$，且最大需求量为 6，其中 x 表示需求量，p 表示价格.

(1)求该商品的收益函数和边际收益函数；(2)求使收益最大时的产量，最大收益和相应的价格；(3)画出收益函数的图形. P37,43 题

五、(本题满分 9 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 计算下列各题：

(1)$S_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx$；(2)$S_1=\int_2^4 f(x-2)e^{-x}\,dx$；(3)$S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\,e^{-x}\,dx\ (n=2,3,\cdots)$；(4)$S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n$.

P69,25 题

六、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\leqslant 0$，记 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$，证明在 (a,b) 内 $F'(x)\leqslant 0$.

P44,68 题

七、(本题满分 5 分)已知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$. P160,25 题

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$. 问：

(1)当 t 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？(2)当 t 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？

(3)当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合. P168,3 题

九、(本题满分 5 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. (1)试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；(2)利用(1)的结果，求矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. P201,2 题

十、(本题满分 7 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

试求：(1)$P\{X<Y\}$；(2)$E(XY)$. P284,14 题

十一、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

P249,14 题

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】

(2)某商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q=aP^b$，其中 a 和 b 为常数，且 $a\neq 0$，则需求量对价格 P 的弹性是

______. P38,44 题

(3)行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$______. P142,2 题

(4)设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,其中 X_1 在$[0,6]$上服从均匀分布,X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$,X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布.记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$,则 $DY=$______. P284,15 题

(5)【同试卷Ⅳ 第一、(4)题】

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】 (2)【同试卷Ⅳ 第二、(2)题】 (3)【同试卷Ⅳ 第二、(3)题】

(4)设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 P182,1 题

(A)$r=n$. (B)$r<n$. (C)$r\geqslant n$. (D)$r>n$.

(5)【同试卷Ⅳ 第二、(5)题】

三、(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$. P9,18 题 (2)已知 $z=a^{\sqrt{x^2-y^2}}$,其中 $a>0,a\neq1$,求 dz. P86,6 题

(3)求不定积分 $\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$. P65,10 题

(4)求二重积分 $\iint\limits_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$,其中 D 是 $x^2+y^2=1,x=0$ 和 $y=0$ 所围成的区域在第Ⅰ象限部分.

P105,15 题

四、(本题满分 6 分)

已知某企业的总收入函数为 $R=26x-2x^2-4x^3$,总成本函数为 $C=8x+x^2$,其中 x 表示产品的产量,求利润函数,边际收入函数,边际成本函数,以及企业获得最大利润时的产量和最大利润. P38,45 题

五、(本题满分 12 分)

已知函数 $y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$,试求其单调区间,极值点及图形的凹凸性、拐点和渐近线,并画出函数的图形. P49,86 题

六、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第七题】

七、(本题满分 6 分)讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)$的线性相关性. P169,4 题

八、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第九题】

九、(本题满分 8 分)已知随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
$P\{X=x,Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

试求:(1)X 的概率分布; (2)$X+Y$ 的概率分布; (3)$Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$的数学期望. P258,1 题

十、(本题满分 8 分)

某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0,\end{cases}$$

试求:在仪器使用的最初 200 小时内,至少有一只电子元件损坏的概率 α. P249,15 题

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题(1)$y=x+1$.　(2)$[-1,1)$.　(3)λ为不等于1的任意常数.　(4)$1;\frac{1}{2}$.　(5)$\frac{1}{9}$.

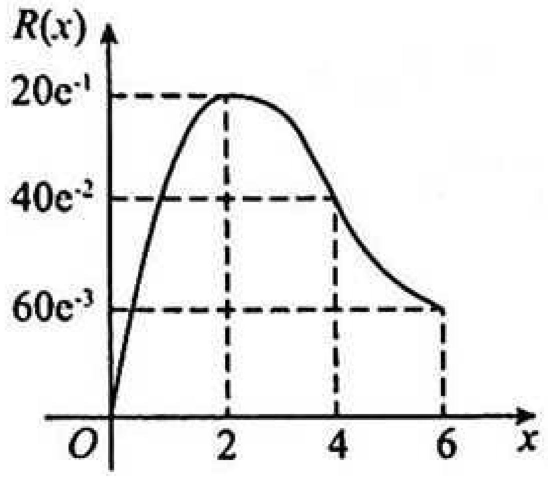
二、选择题(1)(B).　(2)(C).　(3)(C).　(4)(C).　(5)(D).

三、计算题

(1)e.(2)$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$.(3)$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+e^{-x}$,其中$C_1,C_2$为任意常数.

四、(1)$R(x)=px=10xe^{-\frac{x}{2}}$,$0\leqslant x\leqslant 6$,$MR=\frac{dR}{dx}=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}$.(2)产量为2,收益最大为$20e^{-1}$,相应的价格为$10e^{-1}$.

(3)图形如图所示.



五、(1)$S_0=(1-e^{-1})^2$.(2)$S_1=S_0e^{-2}=e^{-2}(1-e^{-1})^2$.(3)$S_n=S_0e^{-2n}=e^{-2n}(1-e^{-1})^2$.(4)$S=\frac{e-1}{e+1}$.

六、证明略.　七、$\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{bmatrix}$.

八、(1)$t\neq5$时,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.(2)$t=5$时,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.(3)$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

九、(1)1,1,−5.　(2)2,2,$\frac{4}{5}$.　十、(1)$\frac{1}{2}$.　(2)1.　十一、$\frac{20}{27}$.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题(1)略.　(2)b.　(3)x^4.　(4)46.　(5)略.

二、选择题(1)略.　(2)略.　(3)略.　(4)(B).　(5)略.

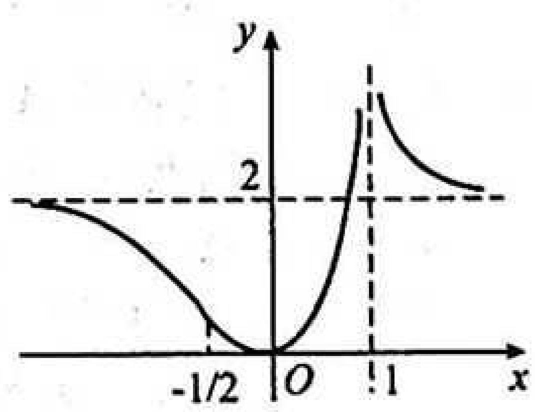
三、(1)e.(2)$\frac{z\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}(xdx-ydy)$.(3)$\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)+C$,其中$C$为任意常数.(4)$\frac{\pi}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$.

四、利润函数为$L=18x-3x^2-4x^3$.边际收入函数$MR=26-4x-12x^2$.边际成本函数$MC=8+2x$.产量为1时利润最大,最大利润为11.

五、单增区间为$(0,1)$,单减区间为$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$;极小值$f(0)=0$;在$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$上是凸的,在$\left(-\frac{1}{2},1\right)$和$(1,+\infty)$上是凹的,$\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$是曲线的拐点.

$y=2$为图形的水平渐近线.$x=1$为图形的铅直渐近线.

函数的图形如图所示.



六、略.　七、$t\neq1$时,线性无关;$t=1$时,线性相关.　八、略.

九、(1)X的概率分布为

X	0	1	2
$P\{X=x\}$	0.25	0.45	0.30

(2)$X+Y$的概率分布为

S	0	1	2	3
$P\{X+Y=s\}$	0.10	0.40	0.35	0.15

(3)$EZ=0.25$.　十、$1-e^{-1}$.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅳ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________. P17,49 题

(2)设 $f(x)$有连续的导数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数

$A=$________. P23,69 题

(3)曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围成的平面图形面积为________. P77,52 题

(4)若线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\ x_2+x_3=a_2,\\ x_3+x_4=-a_3,\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$$

有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件________. P182,2 题

(5)一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，若至少命中一次的概率为$\dfrac{80}{81}$，则该射手的命中率为________.

P241,33 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)设函数 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$是 P4,1 题

(A)偶函数. (B)无界函数. (C)周期函数. (D)单调函数.

(2)设函数 $f(x)$对任意的 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则 P28,1 题

(A)$f(x)$在 $x=1$ 处不可导. (B)$f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$.

(C)$f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$. (D)$f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.

(3)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是 P169,5 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关.

(4)设 A,B 为两个随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子中正确的是 P237,15 题

(A)$P(A+B)=P(A)$. (B)$P(AB)=P(A)$.

(C)$P(B|A)=P(B)$. (D)$P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(5)设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布为 P258,2 题

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是

(A)$X=Y$.　　(B)$P\{X=Y\}=0$.　　(C)$P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$.　　(D)$P\{X=Y\}=1$.

三、(本题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分)

(1)求函数 $I(x)=\int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间$[e,e^2]$上的最大值. P74,42 题

(2)计算二重积分 $\iint\limits_D xe^{-y^2}dxdy$,其中 D 是曲线$y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域. P106,16 题

(3)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域. P120,18 题

(4)求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$的通解. P130,3 题

四、(本题满分 9 分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告,根据统计资料,销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下经验公式

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

(1)在广告费用不限的情况下,求最优广告策略;(2)若提供的广告费用为 1.5 万元,求相应的最优广告策略.

P96,44 题

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$在闭区间$[0,c]$上连续,其导数 $f'(x)$在开区间$(0,c)$内存在且单调减少,$f(0)=0$,试应用拉格朗日中值定理证明不等式 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$,其中常数 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$. P52,93 题

六、(本题满分 8 分)

已知线性方程组
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}\qquad(*)$$

(1)a,b 为何值时,方程组有解?(2)方程组有解时,求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3)方程组有解时,求出方程组的全部解. P185,10 题

七、(本题满分 5 分)

已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,存在自然数 k,使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 试证明矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,并写出其逆矩阵的表达式($\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵).

P155,8 题

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. P201,3 题

九、(本题满分 4 分)

从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率:$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$;$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$;$A_3=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$. P235,7 题

十、(本题满分 5 分)

一电子仪器由两个部件构成,以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位:千小时),已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant0,y\geqslant0,\\0, & 其他.\end{cases}$$

(1)问 X 和 Y 是否独立?(2)求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α. P270,27 题

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

十一、(本题满分 7 分)

某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制)近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率. P249,16 题

[附表](表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】　(2)【同试卷Ⅳ　第一、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第一、(3)题】　(4)【同试卷Ⅳ　第一、(4)题】

(5)已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X,Y 相互独立，设随机变量 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$________. P265,15 题

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第二、(1)题】　(2)【同试卷Ⅳ　第二、(2)题】　(3)【同试卷Ⅳ　第二、(3)题】

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=$ P153,3 题

(A) $|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　(B) $|\boldsymbol{A}|$.　(C) $|\boldsymbol{A}|^n$.　(D) $|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

(5)已知随机变量 X 服从二项分布，且 $EX=2.4$，$DX=1.44$，则二项分布的参数 n,p 的值为 P280,4 题

(A) $n=4,p=0.6$.　(B) $n=6,p=0.4$.　(C) $n=8,p=0.3$.　(D) $n=24,p=0.1$.

三、(本题满分 20 分，每小题 5 分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dt$. P14,39 题　(2)求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\,dx$. P65,11 题

(3)设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$，其中 φ 为可微函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. P88,16 题

(4)【同试卷Ⅳ　第三、(2)题】

四、(本题满分 9 分)【同试卷Ⅳ　第四题】

五、(本题满分 6 分)证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$. P52,94 题

六、(本题满分 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$，计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵，λ 为常数.

P142,3 题

七、(本题满分 5 分)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位阵. 试证明 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1. P201,4 题

八、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ　第六题】　**九、(本题满分 5 分)**【同试卷Ⅳ　第九题】

十、(本题满分 6 分)

甲乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的为 0.5，以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数，试求 X 和 Y 的联合概率分布. P258,3 题

十一、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ　第十一题】

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题

(1)2.　(2)$a+b$.　(3)$\frac{9}{2}$.　(4)$a_1+a_2+a_3+a_4=0$.　(5)$\frac{2}{3}$.

二、选择题

(1)(B).　(2)(D).　(3)(C).　(4)(A).　(5)(C).

三、(1)$\ln(1+\mathrm{e})-\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.　(2)$\frac{5}{144}$.　(3)[2,4].　(4)$\mathrm{e}^{-\sin x}(x\ln x-x+C)$,其中 C 为任意常数.

四、(1)$x_1=0.75,x_2=1.25$.　(2)$x_1=0,x_2=1.5$.　五、证明略.　六、(1)$a=1,b=3$.

(2)$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.　(3)$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

七、证明略,$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.　八、证明略.　九、$P(A_1)=\frac{7}{15},P(A_2)=\frac{14}{15},P(A_3)=\frac{7}{30}$.

十、(1)独立.　(2)$\alpha=\mathrm{e}^{-0.1}$.　十一、0.682.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题

(1)略.　(2)略.　(3)略.　(4)略.　(5)$N(0,5)$.

二、选择题

(1)略.　(2)略.　(3)略.　(4)(A).　(5)(B).

三、(1)$\frac{1}{2}$.　(2)$-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C$,其中 C 为任意常数.　(3)$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-z\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}$.　(4)略.

四、略.　五、证明略.　六、$\lambda^{10}-10^{10}$.　七、证明略.　八、略.　九、略.

十、

Y \ X	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	0.08	0.01

十一、略.

1991年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅳ）

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1)设 $z=e^{\sin xy}$,则 $dz=$________. P86,7题

(2)设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点$(-1,0)$,且在点$(-1,0)$有公共切线,则 $a=$________,$b=$________,$c=$________. P36,34题

(3)设 $f(x)=xe^x$,则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$________处取极小值________. P44,69题

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$为分块矩阵,则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$________. P155,9题

(5)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ 0.4, & -1\leqslant x<1, \\ 0.8, & 1\leqslant x<3, \\ 1, & x\geqslant 3. \end{cases}$ 则 X 的概率分布为________.

P246,7题

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1)下列各式中正确的是 P9,19题

(A)$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$. (B)$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. (C)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=-e$. (D)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=e$.

(2)设 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则下列级数中肯定收敛的是 P115,4题

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. (C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$. (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值之一是 P201,5题

(A)$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$. (B)$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$. (C)$\lambda|\boldsymbol{A}|$. (D)$\lambda|\boldsymbol{A}|^n$.

(4)设 A 和 B 是任意两个概率不为零的互不相容事件,则下列结论中肯定正确的是 P234,4题

(A)$\overline{A}$与$\overline{B}$不相容. (B)$\overline{A}$与$\overline{B}$相容. (C)$P(AB)=P(A)P(B)$. (D)$P(A-B)=P(A)$.

(5)对任意两个随机变量 X 和 Y,若 $E(XY)=EXEY$,则 P284,16题

(A)$D(XY)=DXDY$. (B)$D(X+Y)=DX+DY$. (C)X 与 Y 独立. (D)X 与 Y 不独立.

三、(本题满分5分)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 n 是给定的自然数. P10,20题

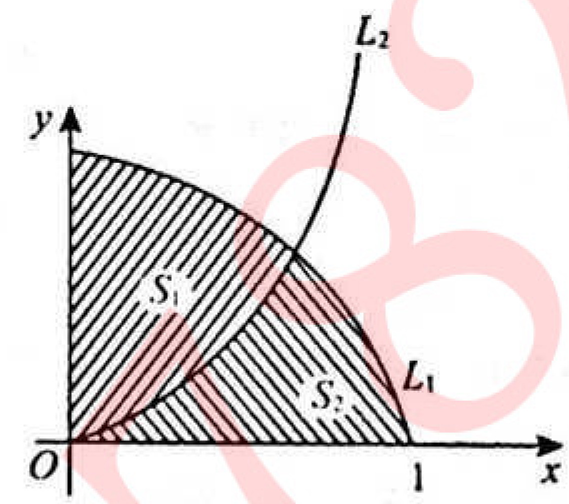
四、(本题满分5分)计算二重积分 $I=\iint\limits_D y\,dx\,dy$,其中 D 是由 x 轴,y 轴与曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 所围成的区域,$a>0,b>0$. P106,17题

五、(本题满分5分)求微分方程 $xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足 $y|_{x=e}=2e$ 的特解. P130,4题

六、(本题满分5分)

假设曲线 $L_1:y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$,$x$ 轴和 y 轴所围区域被曲线 $L_2:y=ax^2$ 分为面积相等的两部分(如右下图),其

中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值. P77,53 题



七、(本题满分 8 分)

某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$ 和 $q_2=10-0.05p_2$，总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$. 试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？ P94,39 题

八、(本题满分 6 分)试证明函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加. P44,70 题

九、(本题满分 7 分)

设有 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，问 λ 取何值时：

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一？(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？ P176,22 题

十、(本题满分 6 分)考虑二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，问 λ 取何值时，f 为正定二次型？ P226,14 题

十一、(本题满分 6 分)

试证明 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm T}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的转置，$i=1,2,\cdots,n$. P169,6 题

十二、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅴ　第十三、(1)题】

十三、(本题满分 6 分)假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上服从联合均匀分布.

(1)求 X 和 Y 的相关系数 ρ；(2)问 X 和 Y 是否独立？ P270,28 题

十四、(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为 $p(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^a}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$a>0$ 是已知常数. 试根据来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$. P297,1 题

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】　(2)【同试卷Ⅳ　第一、(2)题】　(3)【同试卷Ⅳ　第一、(3)题】

(4) n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}_{n\times n}=$________. P143,4 题

(5)设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________. P237,16 题

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第二、(1)题】

(2)设数列的通项为：$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$，x_n 是　　P6,7 题

(A)无穷大量.　　(B)无穷小量.　　(C)有界变量.　　(D)无界变量.

(3)设 A 与 B 为 n 阶方阵，且 $AB=O$，则必有　　P146,12 题

(A)$A=O$ 或 $B=O$.　　(B)$AB=BA$.　　(C)$|A|=0$ 或 $|B|=0$.　　(D)$|A|+|B|=0$.

(4)设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是　　P182,3 题

(A)若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解.　　(B)若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多个解.

(C)若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=0$ 仅有零解.　　(D)若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=0$ 有非零解.

(5)【同试卷Ⅳ· 第二、(4)题】

三、(本题满分 5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.　　P10,21 题

四、(本题满分 5 分)求定积分 $I=\int_{-1}^{1}(2x+|x|+1)^2\,dx$.　　P69,26 题

五、(本题满分 5 分)求不定积分 $I=\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$.　　P66,12 题

六、(本题满分 5 分)

已知 $xy=xf(z)+yg(z)$，$xf'(z)+yg'(z)\neq0$，其中 $z=z(x,y)$ 是 x 和 y 的函数，求证

$$[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

P91,28 题

七、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅳ　第六题】　　**八、(本题满分 8 分)**【同试卷Ⅳ　第七题】

九、(本题满分 6 分)证明不等式 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{1+x}\;(0<x<+\infty)$.　　P53,95 题

十、(本题满分 5 分)

设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$.

(1)证明 $A-E$ 为可逆矩阵；(2)已知 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.　　P161,26 题

十一、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ　第九题】

十二、(本题满分 5 分)

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.　　P201,6 题

十三、(本题满分 7 分)

一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等. 以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数.

(1)求 X 的概率分布；(2)求 $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.　　P247,8 题

十四、(本题满分 6 分)

在电源电压不超过 200 伏，200～240 伏和超过 240 伏三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2. 假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$. 试求：

(1)该电子元件损坏的概率 α；(2)该电子元件损坏时，电源电压在 200～240 伏的概率 β.

[附表](表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数)　　P238,17 题

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题

(1)$e^{\sin xy}\cos xy(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$. (2)$-1;-1;1$. (3)$-(n+1);-\frac{1}{e^{n+1}}$. (4)$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

(5)

X	-1	1	3
p	0.4	0.4	0.2

.

二、选择题

(1)(A). (2)(D). (3)(B). (4)(D). (5)(B).

三、$e^{\frac{n+1}{2}}$. 四、$\frac{ab^2}{30}$. 五、$y^2=2x^2(\ln x+1)$. 六、$a=3$.

七、$p_1=80$,$p_2=120$ 时,其最大总利润为 605. 八、证明略.

九、(1)若 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示.

(2)若 $\lambda=0$,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表达式不唯一.

(3)若 $\lambda=-3$,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

十、$-2<\lambda<1$. 十一、证明略. 十二、略.

十三、(1)$\rho=0$;(2)X 与 Y 不独立. 十四、$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}$.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题

(1)略. (2)略. (3)略. (4)$a^n+(-1)^{n+1}b^n$. (5)0.6.

二、选择题

(1)略. (2)(D). (3)(C). (4)(D). (5)略.

三、1. 四、$\frac{22}{3}$. 五、$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$,其中 C 为任意常数. 六、证明略.

七、略. 八、略.

九、证明略. 十、(1)证明略. (2)$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 十一、略. 十二、$k=1$ 或 $k=-2$.

十三、(1)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2)$E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{67}{96}$.

十四、(1)$\alpha=0.064$. (2)$\beta\approx0.009$.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设商品的需求函数 $Q=100-5p$,其中 Q,p 分别表示需求量和价格,如果商品需求弹性的绝对值大于 1,则商品价格的取值范围是________. P38,46 题

(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为________. P120,19 题

(3)交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\mathrm{d}x=$________. P102,6 题

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$,$|\boldsymbol{B}|=b$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$________. P146,13 题

(5)将 C,C,E,E,I,N,S 这七个字母随机地排成一行,则恰好排成 $SCIENCE$ 的概率为________. P235,8 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于 P14,40 题

(A)a^2. (B)$a^2 f(a)$. (C)0. (D)不存在.

(2)当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量? P19,58 题

(A)x^2. (B)$1-\cos x$. (C)$\sqrt{1-x^2}-1$. (D)$x-\tan x$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分条件是 P183,4 题

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关. (B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关. (D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关.

(4)设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则 P238,18 题

(A)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$. (B)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C)$P(C)=P(AB)$. (D)$P(C)=P(A\cup B)$.

(5)设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,$DX_1=\sigma^2$,$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则 P297,2 题

(A)S 是 σ 的无偏估计量. (B)S 是 σ 的最大似然估计量.

(C)S 是 σ 的相合估计量(即一致估计量). (D)S 与 $\overline{X}$ 相互独立.

三、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?若不连续,修改函数在 $x=1$ 处的定义,使之连续. P23,70 题

四、(本题满分 5 分)计算 $I=\int\dfrac{\operatorname{arccot} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$. P66,13 题

五、(本题满分 5 分)设 $z=\sin xy+\varphi\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,其中 $\varphi(u,v)$ 具有二阶偏导数. P89,17 题

六、(本题满分 5 分)求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$. P135,19 题

七、(本题满分 6 分)求证：当 $x\geqslant 1$ 时，$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$. P60,118 题

八、(本题满分 9 分)

设曲线方程为 $y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$.

(1)把曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$，x 轴，y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周，得一旋转体，求此旋转体体积 $V(\xi)$；求满足 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a.

(2)在此曲线上找一点，使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大，并求出该面积. P77,54 题

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$.

(1)求 x 和 y 的值；(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$. P205,15 题

十、(本题满分 6 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是以下方程组的解：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$$

(1)求 λ 的值；(2)证明 $|\boldsymbol{B}|=0$. P150,28 题

十一、(本题满分 6 分)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶，n 阶正定矩阵，试判定分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 是否是正定矩阵.

P226,15 题

十二、(本题满分 7 分)

假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，试求在 100 次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α，并利用泊松分布求出 α 的近似值(要求小数点后取两位有效数字).

附表 P250,17 题

λ	1	2	3	4	5	6	7	…
$\mathrm{e}^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	…

十三、(本题满分 5 分)

一台设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10、0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的概率分布、数学期望 EX 和方差 DX. P247,9 题

十四、(本题满分 4 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\0, & 其他.\end{cases}$$

(1)求 X 的概率密度 $f_X(x)$；(2)求概率 $P\{X+Y\leqslant 1\}$. P265,16 题

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t)=$________. P32,16 题

(2)【同试卷Ⅳ 第一、(1)题】

(3)设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$________；其定义域为________. P4,2 题

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

(4)矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值是________. P202,7 题

(5)设对于事件 A,B,C,有 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,则 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为________. P238,19 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】

(2)当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,比其他三个更高阶的无穷小量是 P19,59 题

(A)x^2. (B)$1-\cos x$. (C)$\sqrt{1-x^2}-1$. (D)$x-\sin x$.

(3)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于 P155,10 题

(A)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. (B)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. (C)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$. (D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

(4)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量,那么下列结论正确的是 P169,7 题

(A)若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(B)若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$.

(D)若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(5)【同试卷Ⅳ 第二、(4)题】

三、(本题满分 5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$. P10,22 题

四、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第四题】

五、(本题满分 6 分)求连续函数 $f(x)$,使它满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$. P74,43 题

六、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第五题】

七、(本题满分 6 分)

设生产某产品的固定成本为 10,而当产量为 x 时的边际成本函数为 $MC=-40-20x+3x^2$,边际收入函数为 $MR=32+10x$. 试求:

(1)总利润函数;(2)使总利润最大的产量. P38,47 题

八、(本题满分 6 分)求证:方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根,其中 p,q 为常数,且 $0<q<1$. P55,100 题

九、(本题满分 7 分)给定曲线 $y=\frac{1}{x^2}$.

(1)求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程;(2)求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度. P45,71 题

十、(本题满分 5 分)

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位阵,又已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$,试求出矩阵 $\boldsymbol{X}$. P161,27 题

十一、(本题满分 5 分)

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$,3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 试求 λ 的值. P148,25 题

十二、(本题满分 6 分)

已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件:①$a_{ij}=A_{ij}\,(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式;②$a_{11}\neq0$. 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$. P146,14 题

十三、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第十二题】 十四、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第十三题】

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题

(1)(10,20]. (2)(0,4). (3) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

(4) $(-1)^{mn}ab$. (5) $\frac{1}{1\,260}$.

二、选择题

(1)(B). (2)(D). (3)(A). (4)(B). (5)(C).

三、在 $x=1$ 处不连续,令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$,则连续.

四、$-e^{-x}\operatorname{arccot} e^x-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$,其中 C 为任意常数.

五、$\cos xy-xy\sin xy-\frac{1}{y^2}\varphi'_v-\frac{x}{y^2}\varphi''_{uv}-\frac{x}{y^3}\varphi''_{vv}$. 六、$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$. 七、证明略.

八、(1) $V(\xi)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2\xi})$;$a=\frac{1}{2}\ln 2$. (2)切点为 $(1,e^{-1})$,$S=2e^{-1}$.

九、(1) $x=0,y=-2$.(2) $\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$. 十、(1) $\lambda=1$.(2)证明略. 十一、C 是正定矩阵.

十二、$\alpha=1-0.95^{100}-100\times0.05\times0.95^{99}-\frac{100\times99}{2}\times0.05^2\times0.95^{98}$,$\alpha\approx0.87$.

十三、$X\sim\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0.504&0.398&0.092&0.006\end{pmatrix}$,$EX=0.6$,$DX=0.46$.

十四、(1) $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$ (2) $P\{X+Y\leqslant1\}=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题

(1) $(2t+1)e^{2t}$. (2)略. (3) $\arcsin(1-x^2)$;$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. (4)4. (5) $\frac{5}{8}$.

二、选择题

(1)略. (2)(D). (3)(C). (4)(B). (5)略.

三、$-\frac{4}{\pi^2}$. 四、略. 五、$f(x)=\cos x-x\sin x+C$,其中 C 为任意常数. 六、略.

七、(1) $L=-10+72x+15x^2-x^3$. (2)12. 八、证明略. 九、(1) $y-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{2}{x_0^3}(x-x_0)$. (2) $l=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

十、$\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$. 十一、$\lambda=1$. 十二、$|A|=1$. 十三、略. 十四、略.

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$________. P10,23 题

(2)已知

$$y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right),f'(x)=\arctan x^2,$$

则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________. P32,18 题

(3)级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\ln^n 3}{2^n}$ 的和为________. P126,30 题

(4)设 4 阶方阵 A 的秩为 2,则其伴随矩阵 A^* 的秩为________. P163,32 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 P28,2 题

(A)极限不存在. (B)极限存在但不连续. (C)连续但不可导. (D)可导.

(2)设 $f(x)$ 为连续函数,且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)dt$,则 $F'(x)$ 等于 P74,44 题

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (B) $f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(C) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (D) $f(\ln x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(3) n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的 P205,16 题

(A)充分必要条件. (B)充分而非必要条件.

(C)必要而非充分条件. (D)既非充分也非必要条件.

(4)设两事件 A 与 B 满足 $P(B|A)=1$,则 P234,5 题

(A) A 是必然事件. (B) $P(B|\bar{A})=0$. (C) $A\supset B$. (D) $A\subset B$.

(5)设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$,且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,$F(x)$ 为 X 的分布函数,则对任意实数 a,有 P245,2 题

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)dx$. (B) $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx$.

(C) $F(-a)=F(a)$. (D) $F(-a)=2F(a)-1$.

三、(本题满分 6 分)

设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$. P91，29 题

四、(本题满分 7 分)

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数 a 的值. P71，34 题

五、(本题满分 9 分)

设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，需求函数为 $q=\frac{1}{e}(d-p)$，其中 C 为成本，q 为需求量(即产量)，p 为单价，a,b,c,d,e 都是正的常数，且 $d>b$，求：

(1)利润最大时的产量及最大利润；(2)需求对价格的弹性；

(3)需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量. P39，48 题

六、(本题满分 8 分)

假设：

(1)函数 $y=f(x)(0\leqslant x<+\infty)$ 满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\leqslant f(x)\leqslant e^x-1$；

(2)平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=e^x-1$ 分别相交于点 P_1 和 P_2；

(3)曲线 $y=f(x)$、直线 MN 与 x 轴所围封闭图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度.

求函数 $y=f(x)$ 的表达式. P137，27 题

七、(本题满分 7 分)

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$. P56，105 题

八、(本题满分 10 分)

k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\-x_1+kx_2+x_3=k^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}\qquad(*)$$

有唯一解、无解、有无穷多解？在有解情况下，求出其全部解. P186，11 题

九、(本题满分 9 分)

设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 都是 3 维列向量，$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵. 试求常数 α,β. P219，1 题

十、(本题满分 9 分)

设随机变量 X 和 Y 同分布，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，求常数 a；(2)求 $\frac{1}{X^2}$ 的数学期望. P250，18 题

十一、(本题满分 8 分)

假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(1)求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；

(2)求在设备已无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 Q. P248，10 题

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ ______. P17，50 题

(2)已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________． P32，19 题

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$ ________． P66，14 题

(4)【同试卷Ⅳ 第一、(4)题】

(5)设 10 件产品有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为________． P238，20 题

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】 (2)【同试卷Ⅳ 第二、(2)题】

(3)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于 P146，15 题

(A) $m+n$. (B) $-(m+n)$. (C) $n-m$. (D) $m-n$.

(4)设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于 P202，8 题

(A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

(5)设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$，则 P251，20 题

(A)对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$. (B)对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$.

(C)只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$. (D)对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$.

三、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第三题】

四、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第四题】

五、(本题满分 7 分)

已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C=25\ 000+200x+\frac{1}{40}x^2$(元)，问：

(1)要使平均成本最小，应生产多少件产品？(2)若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品？ P39，49 题

六、(本题满分 6 分)

设 p,q 是大于 1 的常数，并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明：对于任意的 $x>0$，有 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$. P53，96 题

七、(本题满分 13 分)运用导数的知识作函数 $y=(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的图形. P49，87 题

八、(本题满分 8 分)已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix},$$

试求其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵. P155，11 题

九、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵($m>n$)，已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$. 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是否线性相关？为什么？ P170，8 题

十、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 独立，都在区间[1，3]上服从均匀分布. 引进事件 $A=\{X\leqslant a\}$，$B=\{Y>a\}$.

(1)已知 $P(A\cup B)=\frac{7}{9}$，求常数 a；(2)求 $\frac{1}{X}$ 的数学期望. P251，19 题

十一、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ 第十一题】

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题

(1)$\frac{6}{5}$. (2)$\frac{3}{4}\pi$. (3)$\frac{2}{2-\ln 3}$. (4)0.

二、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)无正确答案. (5)(B).

三、$dz=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$. 四、$a=0$ 或 $a=-1$.

五、(1)$q=\frac{d-b}{2(e+a)}$;$L=\frac{(d-b)^2}{4(e+a)}-c$. (2)$\frac{d-eq}{eq}$. (3)$q=\frac{d}{2e}$. 六、$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. 七、证明略.

八、①当 $k\neq-1$ 和 4 时,有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$,方程组有唯一解 $x_1=\frac{k^2+2k}{k+1}$,$x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1}$,$x_3=\frac{-2k}{k+1}$;

②当 $k=-1$ 时,方程组无解;

③当 $k=4$ 时,方程组全部解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-3C\\4-C\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$,其中 C 为任意常数.

九、$\alpha=\beta=0$. 十、(1)$a=\sqrt[3]{4}$. (2)$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\frac{3}{4}$.

十一、(1)T 服从参数为 λ 的指数分布. (2)$Q=e^{-8\lambda}$.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题

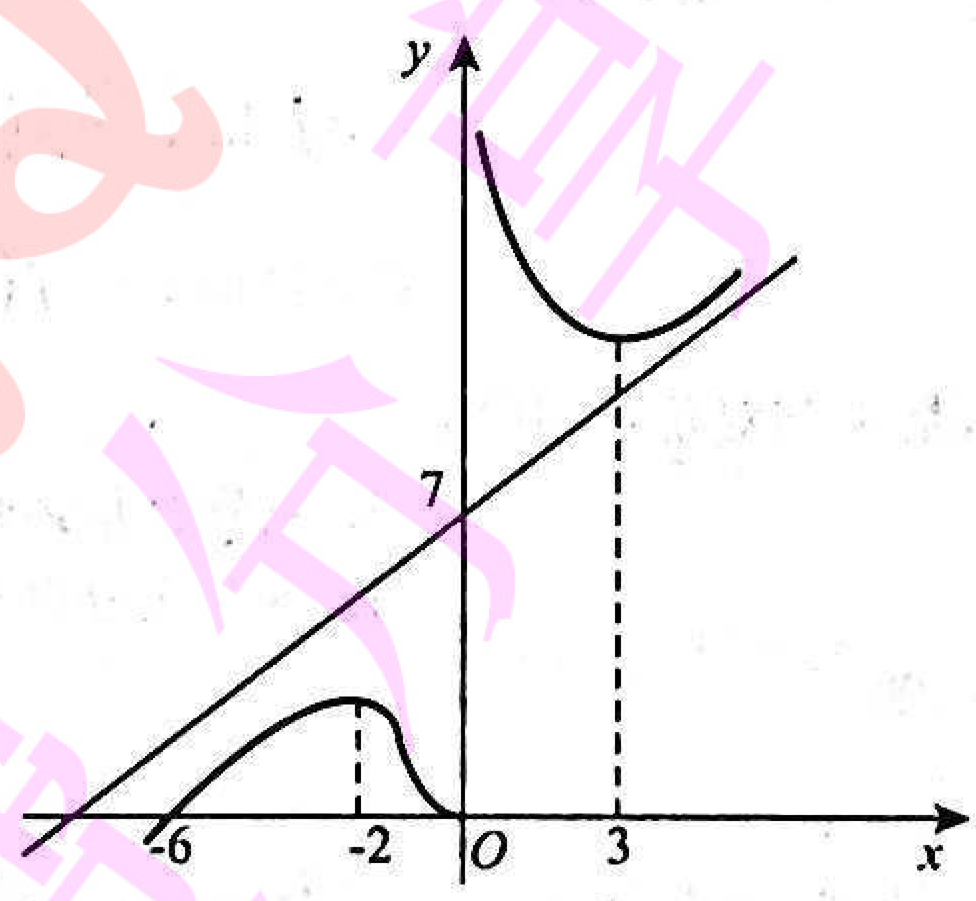
(1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2)$\frac{3\pi}{2}$. (3)$-2\arctan\sqrt{1-x}+C$,其中 C 为任意常数. (4)略. (5)$\frac{1}{5}$.

二、选择题

(1)略. (2)略. (3)(C). (4)(B). (5)(A).

三、略. 四、略. 五、(1)1 000 件. (2)6 000 件. 六、证明略.

七、



八、$\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$. 九、线性无关. 原因略. 十、(1)$a_1=\frac{5}{3}$;$a_2=\frac{7}{3}$;(2)$\frac{1}{2}\ln 3$. 十一、略.

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_______ 分数_______

（试卷Ⅳ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=$________. P69,27 题

(2)已知 $f'(x_0)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$________. P28,3 题

(3)设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________. P33,22 题

(4)设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $A^{-1}=$________. P156,12 题

(5)设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$________. P251,21 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 P50,88 题

(A)1 条. (B)2 条. (C)3 条. (D)4 条.

(2)设常数 $\lambda>0$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ P115,5 题

(A)发散. (B)条件收敛. (C)绝对收敛. (D)敛散性与 λ 有关.

(3)设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 $B=AC$ 的秩为 r_1，则 P163,33 题

(A)$r>r_1$. (B)$r<r_1$.

(C)$r=r_1$. (D)r 与 r_1 的关系依 C 而定.

(4)设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则事件 A 和 B P242,34 题

(A)互不相容. (B)互相对立. (C)不独立. (D)独立.

(5)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是　　P292,1 题

(A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.　　(B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$.

(C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$.　　(D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

三、(本题满分 6 分)计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y+1\}$.　　P106,18 题

四、(本题满分 5 分)设函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases}y''+4y'+4y=0,\\ y(0)=2,y'(0)=-4,\end{cases}$ 求广义积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$.　　P133,13 题

五、(本题满分 5 分)已知 $f(x,y)=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$,求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.　　P86,8 题

六、(本题满分 5 分)设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0,F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.　　P14,41 题

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线.求

(1)常数 a 及切点 (x_0,y_0);(2)两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x.　　P78,55 题

八、(本题满分 6 分)

假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,$f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零,记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x>a)$.证明:$F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.　　P45,72 题

九、(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3,\\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3,\\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3,\\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3.\end{cases}$　　(*)

(1)证明:若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等,则此线性方程组无解;

(2)设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$,且已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解,其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$,写出此方程组的通解.　　P187,12 题

十、(本题满分 8 分)

设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,求 x 和 y 应满足的条件.　　P202,9 题

十一、(本题满分 8 分)

假设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立,且同分布,$P\{X_i=0\}=0.6,P\{X_i=1\}=0.4(i=1,2,3,4)$.求行列式 $X=\begin{vmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{vmatrix}$ 的概率分布.　　P272,31 题

十二、(本题满分 8 分)

假设由自动线加工的某种零件的内径 X(毫米)服从正态分布 $N(\mu,1)$,内径小于 10 或大于 12 为不合格品,其余为合格品.销售每件合格品获利,销售每件不合格品亏损,已知销售利润 T(单位:元)与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T=\begin{cases}-1, & X<10,\\ 20, & 10\leqslant X\leqslant 12,\\ -5, & X>12.\end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时,销售一个零件的平均利润最大?　　P280,5 题

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

（试卷Ⅴ）

一、填空题（本题共5小题，每小题3分，满分15分）

(1)【同试卷Ⅳ 第一、(1)题】 (2)【同试卷Ⅳ 第一、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ 第一、(3)题】 (4)【同试卷Ⅳ 第一、(4)题】

(5)假设一批产品中一、二、三等品各占60%，30%，10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为________． P238,21题

二、选择题（本题共5小题，每小题3分，满分15分）

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】

(2)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有 P55,101题

(A)0个． (B)1个． (C)2个． (D)无穷多个．

(3)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩 P163,34题

(A)必有一个等于零． (B)都小于 n． (C)一个小于 n，一个等于 n．(D)都等于 n．

(4)设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是 P179,29题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$． (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$． (C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$． (D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$．

(5)【同试卷Ⅳ 第二、(4)题】

三、（本题满分5分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$． P10,24题

四、（本题满分5分）【同试卷Ⅳ 第五题】

五、（本题满分6分）已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$． P66,15题

六、（本题满分8分）

某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x（万尾），乙种鱼放养 y（万尾），收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3-\alpha x-\beta y)x \text{ 和 } (4-\beta x-2\alpha y)y \ (\alpha>\beta>0),$$

求使产鱼总量最大的放养数． P95,40题

七、（本题满分8分）

已知曲线 $y=a\sqrt{x}\,(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求

(1)常数 a 及切点 (x_0,y_0)；(2)两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S． P78,56题

八、（本题满分7分）【同试卷Ⅳ 第六题】

九、（本题满分8分）

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系．证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系． P196,26题

十、（本题满分8分）【同试卷Ⅳ 第十题】

十一、（本题满分7分）

假设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

现在对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于0.1的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布． P248,11题

十二、（本题满分8分）【同试卷Ⅳ 第十二题】

（试卷Ⅴ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】　　(2)【同试卷Ⅳ　第一、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第一、(3)题】　　(4)【同试卷Ⅳ　第一、(4)题】

(5)假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为________．　　*P238，21 题*

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)【同试卷Ⅳ　第二、(1)题】

(2)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有　　*P55，101 题*

(A)0 个．　(B)1 个．　(C)2 个．　(D)无穷多个．

(3)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩　　*P163，34 题*

(A)必有一个等于零．　(B)都小于 n．　(C)一个小于 n，一个等于 n．(D)都等于 n．

(4)设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是　　*P179，29 题*

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$．　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$．　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$．　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$．

(5)【同试卷Ⅳ　第二、(4)题】

三、（本题满分 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$．　　*P10，24 题*

四、（本题满分 5 分）【同试卷Ⅳ　第五题】

五、（本题满分 6 分）已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$．　　*P66，15 题*

六、（本题满分 8 分）

某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x(万尾)，乙种鱼放养 y(万尾)，收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3-\alpha x-\beta y)x \text{ 和 } (4-\beta x-2\alpha y)y\ (\alpha>\beta>0),$$

求使产鱼总量最大的放养数．　　*P95，40 题*

七、（本题满分 8 分）

已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求

(1)常数 a 及切点 (x_0,y_0)；(2)两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S．　　*P78，56 题*

八、（本题满分 7 分）【同试卷Ⅳ　第六题】

九、（本题满分 8 分）

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系．　　*P196，26 题*

十、（本题满分 8 分）【同试卷Ⅳ　第十题】

十一、（本题满分 7 分）

假设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

现在对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布．　　*P248，11 题*

十二、（本题满分 8 分）【同试卷Ⅳ　第十二题】

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题

(1)ln 3. (2)1. (3)$-\dfrac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}$. (4)$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$. (5)$\dfrac{9}{64}$.

二、选择题

(1)(B). (2)(C). (3)(C). (4)(D). (5)(B).

三、$\dfrac{3}{2}\pi$. 四、1. 五、$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. 六、$\dfrac{1}{2n}f'(0)$. 七、(1)$a=\dfrac{1}{e}$;切点为$(e^2,1)$. (2)$\dfrac{\pi}{2}$. 八、证明略.

九、(1)证明略. (2)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$($C$为任意常数). 十、$x+y=0$.

十一、$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344 \end{pmatrix}$. 十二、10.9.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题

(1)~(4)略. (5)$\dfrac{2}{3}$.

二、选择题

(1)略. (2)(B). (3)(B). (4)(B). (5)略.

三、$\dfrac{1}{2}$. 四、略. 五、$x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$. 六、$\dfrac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2};\dfrac{4\alpha-3\beta}{2(2\alpha^2-\beta^2)}$.

七、(1)$a=\dfrac{1}{e}$;切点为$(e^2,1)$. (2)$S=\dfrac{1}{6}e^2-\dfrac{1}{2}$. 八、略. 九、证明略. 十、略.

十一、$P\{V_n=m\}=C_n^m 0.01^m 0.99^{n-m}(m=0,1,2,\cdots n)$. 十二、略.

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅳ）

一、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

(1)设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$________． P34，29 题

(2)设 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$f(u)$可导，则 $xz'_x+yz'_y=$________． P89，18 题

(3)设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$________． P131，5 题

(4)设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$________． P157，13 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)设 $f(x)$为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为 P29，4 题

(A)2．　(B)−1．　(C)$\dfrac{1}{2}$．　(D)−2．

(2)下列广义积分发散的是 P72，40 题

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sin x}$．　(B) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$．　(C) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$．　(D) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$．

(3)设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，则下述结论中正确的是 P163，35 题

(A)A 的任意 m 个列向量必线性无关．

(B)A 的任意一个 m 阶子式不等于零．

(C)若矩阵 B 满足 $BA=O$，则 $B=O$．

(D)A 通过初等行变换，必可以化为$(E_m\ \ O)$的形式．

(4)设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X-Y$，$V=X+Y$，则随机变量 U 与 V 必然 P270，29 题

(A)不独立．　(B)独立．　(C)相关系数不为零．　(D)相关系数为零．

(5)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ P251，22 题

(A)单调增大．　(B)单调减小．　(C)保持不变．　(D)增减不定．

三、（本题满分 6 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,dt, & x>0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性和可导性． P34，27 题

四、（本题满分 6 分）

已知连续函数 $f(x)$满足条件 $f(x)=\displaystyle\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$，求 $f(x)$． P135，20 题

五、(本题满分 6 分)

将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数,并指出其收敛区间. P128,37 题

六、(本题满分 6 分)

计算二次积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. P106,19 题

七、(本题满分 6 分)

设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$,收益函数为 $R=PQ$,其中 P 为产品价格,Q 为需求量(产品的产量),$Q(P)$ 是单调减函数,如果当价格为 P_0,对应产量为 Q_0 时,边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=a>0$,收益对价格的边际效应 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0}=c<0$,需求对价格的弹性为 $E_P=b>1$,求 P_0 和 Q_0. P39,50 题

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续,$g(x)$ 为偶函数,且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$(A 为常数).

(1)证明 $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;(2)利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x\mathrm{d}x$. P80,64 题

九、(本题满分 9 分)

已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$;(Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$. 如果各向量组的秩分别为 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=3$,r(Ⅲ)$=4$. 证明:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4. P179,30 题

十、(本题满分 10 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1)写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2)用正交变换把二次型 f 化为标准型,并写出相应的正交矩阵. P219,2 题

十一、(本题满分 8 分)

假设一厂家生产的每台仪器,以概率 0.70 可以直接出厂;以概率 0.30 需进一步调试,经调试后以概率 0.80 可以出厂;以概率 0.20 定为不合格品不能出厂,现该厂生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立).求(1)全部能出厂的概率 α;(2)其中恰好有两件不能出厂的概率 β;(3)其中至少有两件不能出厂的概率 θ.

P242,35 题

十二、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布 $F(x,y)$. P266,17 题

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$,则常数 $a=$ ________. P71,35 题

(2)【同试卷Ⅳ　第一、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第一、(3)题】

(4)【同试卷Ⅳ　第一、(4)题】

(5)设 X 是一个随机变量,其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则方差 $DX=$ ________. P281,6 题

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第二、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ　第二、(2)题】

(3)设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 等于

P152,1 题

(A)$\boldsymbol{O}$.　　(B)$-\boldsymbol{E}$.　　(C)$\boldsymbol{E}$.　　(D)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(4)设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})=m<n$,$\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位矩阵,下述结论中正确的是　P163,36 题

(A)$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关.

(B)$\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C)非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多解.

(D)$\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换,必可以化为$(\boldsymbol{E}_m\quad \boldsymbol{O})$的形式.

(5)【同试卷Ⅳ　第二、(5)题】

三、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅳ　第三题】

四、(本题满分 6 分)

求不定积分 $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.　P66,16 题

五、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ　第八题】

六、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅳ　第七题】

七、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,证明:在(a,b)内至少存在一点 ξ,使$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

P57,106 题

八、(本题满分 9 分)

求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线 $x+y=6$,x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值,最大值与最小值.　P99,50 题

九、(本题满分 8 分)

对于线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2,\end{cases}$　(*)

讨论 λ 取何值时,方程组有唯一解、无解和无穷多解. 在方程组有无穷多解时,试用其导出组的基础解系表示全部解.　P187,13 题

十、(本题满分 8 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$,其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$. 试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

P210,27 题

十一、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ　第十一题】

十二、(本题满分 7 分)

假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布,证明:$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$在区间(0,1)上服从均匀分布.　P254,30 题

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题

(1)$(-1)^n\dfrac{2n!}{(1+x)^{n+1}}$.　(2)$2z$.　(3)$x+e^x+C$,其中 C 为任意常数.　(4)$\begin{bmatrix}1/10 & 0 & 0\\ 1/5 & 1/5 & 0\\ 3/10 & 2/5 & 1/2\end{bmatrix}$.

二、选择题

(1)(D).　(2)(A).　(3)(C).　(4)(D).　(5)(C).

三、连续可导,且 $f'(0)=0$.　四、$f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.

五、$\ln(1-x-2x^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n$,收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.　六、$-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.　七、$P_0=\dfrac{ab}{b-1}$;$Q_0=\dfrac{c}{1-b}$.

八、(1)证明略.　(2)$\dfrac{\pi}{2}$.　九、证明略.　十、(1)$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$.

(2)$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$,正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{30}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \dfrac{5}{\sqrt{30}} & \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{30}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$.

十一、(1)$\alpha=0.94^n$.　(2)$\beta=C_n^2 0.94^{n-2}0.06^2$.　(3)$\theta=1-n\cdot0.94^{n-1}\cdot0.06-0.94^n$.

十二、$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,y>1,\\ y^2, & x>1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & x>1,y>1.\end{cases}$

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题

(1)2.　(2)略.　(3)略.　(4)略.　(5)$\dfrac{1}{6}$.

二、选择题

(1)略.　(2)略.　(3)(C).　(4)(C).　(5)略.

三、略.　四、$x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$,其中 C 为任意常数.　五、略.　六、略.　七、证明略.

八、极大值 $f(2,1)=4$;最大值为 4;最小值为 -64.

九、①当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时,方程组(*)有唯一解;②当 $\lambda=-2$ 时,方程组(*)无解;③当 $\lambda=1$ 时,方程组有无穷多组解.方程组的全部解为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+C_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$,其中 C_1,C_2 是任意常数.

十、$\begin{bmatrix}\dfrac{7}{3} & 0 & -\dfrac{2}{3}\\ 0 & \dfrac{5}{3} & -\dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} & 2\end{bmatrix}$.　十一、略.　十二、证明略.

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅳ）

一、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

(1)设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\mathrm{d}y=$________. P33,23 题

(2)设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$________. P66,17 题

(3)设 (x_0,y_0) 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点. 若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是________.

P36,35 题

(4)设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$. 则线性方程组 $A^{\mathrm{T}}X=B$ 的解是________. P148,26 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成 P102,7 题

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$. (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$. (C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$. (D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(2)下述各选项正确的是 P115,6 题

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

(B)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛.

(C)若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\geqslant\frac{1}{n}$.

(D)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

(3)设 n 阶矩阵 A 非奇异 $(n\geqslant2)$，A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，则 P153,4 题

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$. (B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$. (C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$. (D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$.

(4)设有任意两个 n 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$，使 $(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=\mathbf{0}$，则 P170,9 题

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性相关. (B) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性无关.

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关. (D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关.

(5)已知 $0<P(B)<1$，且 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是　　P239,22 题

(A)$P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$.　　(B)$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.

(C)$P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$.　　(D)$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$.

三、(本题满分 6 分)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.

(1)求 $f'(x)$；(2)讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.　　P34,28 题

四、(本题满分 6 分)设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$P(t)$，$\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.　　P92,30 题

五、(本题满分 7 分)计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$.　　P71,36 题

六、(本题满分 6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$. 试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.　　P57,107 题

七、(本题满分 6 分)设某种商品的单价为 p 时，售出的商品数量 Q 可以表示成 $Q=\dfrac{a}{p+b}-c$，其中 a,b,c 均为正数，且 $a>bc$.

(1)求 p 在何范围变化时，使相应销售额增加或减少；(2)要使销售额最大，商品单价 p 应取何值？最大销售额是多少？　　P40,51 题

八、(本题满分 7 分)求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.　　P131,6 题

九、(本题满分 8 分)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$.

(1)已知 A 的一个特征值为 3，试求 y；(2)求可逆矩阵 P，使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角矩阵.　　P205,17 题

十、(本题满分 8 分)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $A\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 试证明：向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.　　P170,10 题

十一、(本题满分 7 分)假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作. 若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生二次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内利润的期望是多少？　　P281,7 题

十二、(本题满分 6 分)考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚色子(骰子)接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.　　P235,9 题

十三、(本题满分 6 分) 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$. 证明：当 n 充分大时，随机变量 $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数.　　P289,3 题

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】　　(2)【同试卷Ⅳ　第一、(2)题】

(3)设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=$________. P35,30 题

(4)5 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$________. P143,5 题

(5)一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $P_i=\dfrac{1}{i+1}(i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P\{X=2\}=$________. P239,23 题

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是 P45,73 题

(A)$f'(x_0)$是 $f'(x)$的极大值.　　(B)$f(x_0)$是 $f(x)$的极大值.

(C)$f(x_0)$是 $f(x)$的极小值.　　(D)$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(2)设 $f(x)$处处可导，则 P60,119 题

(A)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.　　(B)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.　　(D)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(3)【同试卷Ⅳ　第二、(3)题】　　(4)【同试卷Ⅳ　第二、(4)题】

(5)设 A,B 为任意两个事件，且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列选项必然成立的是 P239,24 题

(A)$P(A)<P(A|B)$.　(B)$P(A)\leqslant P(A|B)$.　(C)$P(A)>P(A|B)$.　(D)$P(A)\geqslant P(A|B)$.

三、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅳ　第三题】

四、(本题满分 7 分)设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}\,dt$，求 $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. P87,9 题

五、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅳ　第五题】　　**六、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ　第七题】**

七、(本题满分 9 分)已知一抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$.

(1)求证：两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积；

(2)计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比. P78,57 题

八、(本题满分 6 分)设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b) 内可导，且 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(b)$. 求证：在$(a,b)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$. P57,108 题

九、(本题满分 9 分)已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t. \end{cases}$ (＊)讨论参数 p,t 取何值时，方程组无解、有解；当有解时，试用其导出组的基础解系表示其通解. P188,14 题

十、(本题满分 7 分)设有 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位阵. 求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值. P202,10 题

十一、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ　第十一题】

十二、(本题满分 6 分)假设一电路装有三个同种电气元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布. 当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作. 试求电路正常工作的时间 T 的概率分布. P272,32 题

答案速查(试卷Ⅳ)

一、填空题(1)$\frac{1}{x(1+\ln y)}\mathrm{d}x$.　(2)$-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$,其中 C 为任意常数.　(3)$\frac{c}{a}\geqslant 0$(或 $ax_0^2=c$),b 任意.　(4)$(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

二、选择题(1)(D).　(2)(A).　(3)(C).　(4)(D).　(5)(B).

三、(1)$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$　(2)$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

四、0.　五、$\ln 2$.　六、证明略.

七、(1)当 $0<p<\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时,相应的销售额将增加. 当 $\frac{a}{c}-b>p>\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时,相应的销售额将减少.　(2)当 $p=\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时,$R_{\max}=(\sqrt{a}-\sqrt{bc})^2$.

八、$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$,其中 C 为任意常数.　九、(1)$y=2$.　(2)$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

十、证明略.　十一、5.216 万元.　十二、$p=\frac{19}{36}$;$q=\frac{1}{18}$.　十三、Z_n 近似服从参数为 $\mu=\alpha_2$,$\sigma^2=\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$ 的正态分布.

答案速查(试卷Ⅴ)

一、填空题(1)略.　(2)略.　(3)$\frac{5}{32}$.　(4)$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.　(5)$\frac{11}{24}$.

二、选择题(1)(D).　(2)(D).　(3)略.　(4)略.　(5)(B).

三、略.　四、$-2e^{-x^2y^2}$.　五、略.　六、略.　七、(1)证明略.　(2)$\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{8}$.　八、证明略.　九、①当 $t\neq -2$ 时,方程组无解;②当 $t=-2$ 时,方程组有解.

(a)若 $p=-8$,方程组有通解 $x=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+C_1\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

(b)若 $p\neq -8$,方程组的通解为 $x=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$,$C$ 为任意常数.

十、$\frac{4}{3}$.　十一、略.　十二、T 服从参数为 3λ 的指数分布.

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题：1～5 小题，每小题 3 分，共 15 分.

(1)设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$__________. P32,20 题

(2)若函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx,$$

则 $\int_0^1 f(x)dx=$__________. P63,2 题

(3)差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的通解为__________. P136,23 题

(4)若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是__________. P226,16 题

(5)设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$，而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从__________分布，参数为__________. P292,2 题

二、选择题：6～10 小题，每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设函数

$$f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2 dt,\ g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6},$$

则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 P20,60 题

(A)低阶无穷小. (B)高阶无穷小.

(C)等价无穷小. (D)同阶但不等价的无穷小.

(7)若函数 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有 P47,79 题

(A)$f'(x)>0,f''(x)<0$. (B)$f'(x)>0,f''(x)>0$.

(C)$f'(x)<0,f''(x)<0$. (D)$f'(x)<0,f''(x)>0$.

(8)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是 P171,11 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$.

(9)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 P158,18 题

(A)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. (B)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(C)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$. (D)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(10)设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，而下列各式

中成立的是 P259,4 题

(A) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$.　　　　(B) $P\{X=Y\}=1$.

(C) $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$.　　　　(D) $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$.

三、解答题:11~21 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)(本题满分 6 分)

在经济学中,称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数,而称函数 $\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$ 为 Cobb−Douglas 生产函数(简称 C−D 生产函数).

试证明:当 $x\to 0$ 时,固定替代弹性生产函数变为 C−D 生产函数,即有 $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$. P40,52 题

(12)(本题满分 5 分)

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数,$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^{z}-xz=0$ 所确定,求 $\frac{du}{dx}$.

P92,31 题

(13)(本题满分 6 分)

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$(万元/吨),x 为销售量(单位:吨),商品的成本函数是 $C=3x+1$(万元).

(Ⅰ)若每销售一吨商品,政府要征税 t(万元),求该商家获最大利润时的销售量;

(Ⅱ)t 为何值时,政府税收总额最大. P40,53 题

(14)(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调不减且 $f(0)\geqslant 0$. 试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,dt, & x>0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减(其中 $n>0$). P45,74 题

(15)(本题满分 6 分)

从点 $P_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线,交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$;再从 Q_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于 P_2. 然后又从 P_2 作 x 轴的垂线,交抛物线于点 Q_2,依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;\cdots;P_n,Q_n;\cdots$.

(Ⅰ)求 $\overline{OP_n}$;

(Ⅱ)求级数 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots$ 的和,其中 $n(n\geqslant 1)$ 为自然数,而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 M_1 与 M_2 之间的距离.

P126,31 题

(16)(本题满分 6 分)

设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$,求 $f(t)$.

P135,21 题

(17)(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量,b 为常数. 记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(Ⅰ)计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$;

(Ⅱ)证明:矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^T A^{-1} \boldsymbol{\alpha} \neq b$. P157,14 题

(18)(本题满分 10 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 1,2,3;矩阵 A 的属于特征值 1,2 的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,-1)^T$.

(Ⅰ)求 A 的属于特征值 3 的特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 A. P212,29 题

(19)(本题满分 7 分)

假设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$, $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$,在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下,X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求 X 的分布函数. P248,12 题

(20)(本题满分 6 分)

游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光,电梯于每个整点的第 5 分钟,25 分钟和 55 分钟从底层起行. 假设一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处,且 X 在 $[0,60]$ 上均匀分布,求该游客等候时间的数学期望.

P281,8 题

(21)(本题满分 6 分)

两台同样自动记录仪,每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布. 首先开动其中一台,当其发生故障时停用而另一台自行开动. 试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$,数学期望和方差.

P285,17 题

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

答案速查

一、填空题

(1)$e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx$. (2)$\frac{\pi}{4-\pi}$. (3)$y_t=C+(t-2)2^t$，其中$C$为任意常数.

(4)$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$. (5)t;9.

二、选择题

(6)(B). (7)(C). (8)(C). (9)(D). (10)(A).

三、解答题

(11)证明略. (12)$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y^2}{1-xy}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{xz-x}\frac{\partial f}{\partial z}$. (13)(Ⅰ)$\frac{5}{2}(4-t)$. (Ⅱ)$t=2$.

(14)证明略. (15)(Ⅰ)$\frac{1}{2^{n-1}}$. (Ⅱ)$\frac{4}{3}$. (16)$f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$.

(17)(Ⅰ)$PQ=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{pmatrix}$. (Ⅱ)证明略.

(18)(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_3=k(1,0,1)^T$($k$为任意非零常数). (Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{bmatrix}$.

(19)$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ (5x+7)/16, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ (20)11.67.

(21)$f(t)=\begin{cases}25te^{-5t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ $ET=\frac{2}{5}$;$DT=\frac{2}{25}$.

1998年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题：1～5小题，每小题3分，共15分.

(1)设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$________. P36,36题

(2) $\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$________. P67,18题

(3)差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为________. P136,24题

(4)设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{B}=$________. P161,28题

(5)设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，

$$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2,\text{其中 }a,b\neq0.$$

则当 $a=$________，$b=$________时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为________. P292,3题

二、选择题：6～10小题，每小题3分，共15分. 下列每题给出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为4. 又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为 P36,37题

(A) $\frac{1}{2}$. (B)0. (C) -1. (D) -2.

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为 P24,71题

(A)不存在间断点. (B)存在间断点 $x=1$.

(C)存在间断点 $x=0$. (D)存在间断点 $x=-1$.

(8)齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$. 若存在3阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 P150,29题

(A) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$. (B) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

(C) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$. (D) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$.

(9)设 $n(n\geqslant3)$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{pmatrix},$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$，则 a 必为　　　　P164，37 题

(A)1.　　(B)$\frac{1}{1-n}$.　　(C)-1.　　(D)$\frac{1}{n-1}$.

(10)设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数. 为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取　　　　P245，3 题

(A)$a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$.　　(B)$a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$.

(C)$a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$.　　(D)$a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$.

三、解答题：11～20 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)(本题满分 5 分)

设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.　　　　P87，10 题

(12)(本题满分 5 分)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$，求 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,dxdy$.　　　　P107，20 题

(13)(本题满分 6 分)

设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在(假定 $t=0$)就售出，总收入为 R_0(元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，假定银行的年利率为 r，并以连续复利计息，试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大. 并求 $r=0.06$ 时的 t 值.　　　　P40，54 题

(14)(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$.

P57，109 题

(15)(本题满分 6 分)

设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(Ⅰ)求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n；

(Ⅱ)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.　　　　P127，32 题

(16)(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续. 若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1,x=t(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)].$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y\Big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.　　　　P137，28 题

(17)(本题满分 9 分)

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$. 记 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$. 求：

(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^2$；

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.　　　　P203，11 题

(18)(本题满分 7 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$，其中 k 为实数，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，并求

k 为何值时，B 为正定矩阵. P227，17 题

(19)(本题满分 10 分)

一商店经销某种商品，每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间[10，20]上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润1 000元；若需求量超过了进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

P285，18 题

(20)(本题满分 9 分)

设有来自三个地区的各 10 名，15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(Ⅰ)求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(Ⅱ)已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q. P239，25 题

答案速查

一、填空题

(1)$\frac{1}{e}$.　(2)$-\frac{\ln x}{x}+C$,其中C为任意常数.　(3)$y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$,其中$C$为任意常数.

(4)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(5)$\frac{1}{20}$;$\frac{1}{100}$;2.

二、选择题

(6)(D).　(7)(B).　(8)(C).　(9)(B).　(10)(A).

三、解答题

(11)$dz=e^{-\arctan\frac{y}{x}}[(2x+y)dx+(2y-x)dy]$;$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}$.

(12)$\frac{8}{15}$.　(13)$t=\frac{1}{25r^2}$年;$t=\frac{100}{9}\approx 11$(年).　(14)证明略.

(15)(Ⅰ)$S_n=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}$.　(Ⅱ)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}$.

(16)$x^2y'=3y^2-2xy$;所求的解为$y-x=-x^3y$(或$y=\frac{x}{1+x^3}$).

(17)(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.　(Ⅱ)特征值为$\lambda=0$,全部特征向量为$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$($c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$是不全为零的任意常数).

(18)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(k+2)^2&&\\&(k+2)^2&\\&&k^2\end{pmatrix}$;当$k\neq-2$且$k\neq0$时,$\boldsymbol{B}$为正定矩阵.

(19)$EZ\approx 14\,166.67$元.　(20)(Ⅰ)$\frac{29}{90}$.　(Ⅱ)$\frac{20}{61}$.

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1~5 小题,每小题 3 分,共 15 分.

(1)设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$,则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x=$________. P69,28 题

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$________. P127,33 题

(3)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,而 $n\geqslant 2$ 为正整数,则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$________. P152,2 题

(4)在天平上重复称量一重为 a 的物品,假设各次称量结果相互独立且同服从正态分布 $N(a,0.2^2)$.若以 $\overline{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值,则为使 $P\{|\overline{X}_n-a|<0.1\}\geqslant 0.95$,$n$ 的最小值应不小于自然数________. P290,4 题

(5)设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 独立同分布,$EX_{ij}=2$,则行列式

$$Y=\begin{vmatrix}X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1n}\\X_{21}&X_{22}&\cdots&X_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\X_{n1}&X_{n2}&\cdots&X_{nn}\end{vmatrix}$$

的数学期望 $EY=$________. P285,19 题

二、选择题:6~10 小题,每小题 3 分,共 15 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则 P4,3 题

(A)当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数.

(B)当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数.

(C)当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数.

(D)当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必为单调增函数.

(7)设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域,则 $f(x,y)$ 等于 P100,1 题

(A)xy. (B)$2xy$. (C)$xy+\frac{1}{8}$. (D)$xy+1$.

(8)设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但不能由向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,记向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$,则 P176,23 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示,也不能由(Ⅱ)线性表示.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由(Ⅰ)线性表示,但可由(Ⅱ)线性表示.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由(Ⅰ)线性表示,也可由(Ⅱ)线性表示.

(D)α_m 可由(Ⅰ)线性表示,但不可由(Ⅱ)线性表示.

(9)设 A,B 为 n 阶矩阵,且 A 与 B 相似,E 为 n 阶单位矩阵,则 【P207,18 题】

(A)$\lambda E-A=\lambda E-B$.

(B)A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

(C)A 与 B 都相似于一个对角矩阵.

(D)对任意常数 t,$tE-A$ 与 $tE-B$ 相似.

(10)设随机变量 $X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}(i=1,2)$,且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$,则 $P\{X_1=X_2\}$ 等于 【P259,5 题】

(A)0.

(B)$\frac{1}{4}$.

(C)$\frac{1}{2}$.

(D)1.

三、解答题:11~20 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)(本题满分 6 分)

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形,记切点的横坐标为 a.试求切线方程和这个图形的面积.当切点沿曲线趋于无穷远时,该面积的变化趋势如何? 【P36,38 题】

(12)(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=-2,y=0,y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

【P107,21 题】

(13)(本题满分 6 分)

设生产某种产品必须投入两种要素,x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量,Q 为产出量;若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$,其中 α,β 为正常数,且 $\alpha+\beta=1$.假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2,试问:当产出量为 12 时,两要素各投入多少可以使得投入总费用最小? 【P97,45 题】

(14)(本题满分 6 分)

设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$,使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程,且满足条件 $y(0)=0$. 【P131,7 题】

(15)(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 连续,且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$.已知 $f(1)=1$,求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值. 【P70,29 题】

(16)(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.试证:

(Ⅰ)存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使 $f(\eta)=\eta$;

(Ⅱ)对任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$ 【P57,110 题】

(17)(本题满分 9 分)

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{bmatrix}$,且 $|A|=-1$.又设 A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 λ_0,属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求 a,b,c 及 λ_0 的值. 【P203,12 题】

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

(18)(本题满分 7 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

P227,18 题

(19)(本题满分 9 分)

假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形

$$G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

上服从均匀分布. 记

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 U 和 V 的联合分布；

(Ⅱ)求 U 和 V 的相关系数 r.

P260,6 题

(20)(本题满分 7 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6),Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S},$$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

P292.4 题

答案速查

一、填空题

(1)$\frac{4}{\pi}-1$. (2)4. (3)$O_{3\times3}$(即 3×3 阶零矩阵). (4)16. (5)0.

二、选择题

(6)(A). (7)(C). (8)(B). (9)(D). (10)(A).

三、解答题

(11)切线方程为 $y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a)$. $\triangle ORQ$ 的面积 $S=\frac{9}{4}\sqrt{a}$.

当切点按 x 轴正方向趋于无穷远时,有 $\lim\limits_{a\to+\infty}S=+\infty$. 当切点按 y 轴正方向趋于无穷远时,有 $\lim\limits_{a\to0^+}S=0$.

(12)$4-\frac{\pi}{2}$. (13)$x_1=6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^{\beta}, x_2=6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{\alpha}$. (14)$y(x)=\begin{cases}e^{2x}-1, & x\leqslant1,\\(1-e^{-2})e^{2x}, & x>1.\end{cases}$ (15)$\frac{3}{4}$.

(16)证明略. (17)$a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$. (18)证明略.

(19)(Ⅰ)

V \ U	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$

(Ⅱ)$r=\frac{1}{\sqrt{3}}$. (20)证明略.

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1~5 小题,每小题 3 分,共 15 分.

(1)设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中 f,g 均可微,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________. P89,19 题

(2)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=$__________. P71,37 题

(3)若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$,则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$__________. P147,16 题

(4)设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & x\in[0,1],\\ \dfrac{2}{9}, & x\in[3,6],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$,则 k 的取值范围是__________. P251,23 题

(5)设随机变量 X 在区间$[-1,2]$上服从均匀分布,随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0,\end{cases}$$

则方差 $DY=$__________. P282,9 题

二、选择题:6~10 小题,每小题 3 分,共 15 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ P6,8 题

(A)存在且等于零. (B)存在但不一定为零.

(C)一定不存在. (D)不一定存在.

(7)设函数 $f(x)$在点 $x=a$ 处可导,则函数$|f(x)|$在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是 P29,5 题

(A)$f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$. (B)$f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq0$.

(C)$f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$. (D)$f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

(8)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量,且 $r(\boldsymbol{A})=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$C$ 表示任意常数,则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{X}=$ P195,23 题

(A)$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$. (C)$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$.

(9)设 A 为 n 阶实矩阵，A^{T} 为 A 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ)：$AX=0$ 和(Ⅱ)：$A^{T}AX=0$，必有 P197，28 题

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解.

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.

(10)在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件"电炉断电"，而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于 P234，6 题

(A)$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$.　　(B)$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$.　　(C)$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$.　　(D)$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$.

三、解答题：11～19 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)(本题满分 7 分)

求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1$，$y'(0)=1$ 的解. P133，14 题

(12)(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_{D}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

P107，22 题

(13)(本题满分 7 分)

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品. 两个市场的需求函数分别是

$$p_1=18-2Q_1，p_2=12-Q_2，$$

其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位：万元/吨)，Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量，单位：吨)，并且该企业生产这种产品的总成本函数是

$$C=2Q+5，$$

其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$.

(Ⅰ)如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

(Ⅱ)如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小. P97，46 题

(14)(本题满分 8 分)

求函数 $y=(x-1)\exp\left\{\dfrac{\pi}{2}+\arctan x\right\}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线. P50，89 题

(15)(本题满分 7 分)

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$. P127，34 题

(16)(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.

试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. P80，65 题

(17)(本题满分 8 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{T}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{T}$. 试问：当 a,b,c 满足什么条件时，

(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示唯一？

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(Ⅲ)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示不唯一？并求出一般表达式. P176，24 题

(18)(本题满分 10 分)

设有 n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 试问:当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时,二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

P227,19 题

(19)(本题满分 9 分)

设 A,B 是两个随机事件,随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 出现},\\ -1, & A\text{ 不出现},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 现出},\\ -1, & B\text{ 不出现}.\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立.

P271,30 题

答案速查

一、填空题

(1)$yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$. (2)$\frac{\pi}{4e}$. (3)24. (4)[1,3]. (5)$\frac{8}{9}$.

二、选择题

(6)(D). (7)(B). (8)(C). (9)(A). (10)(C).

三、解答题

(11)$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(1+2x)e^{2x}$.

(12)$a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)$.

(13)(Ⅰ)$Q_1=4,Q_2=5,p_1=10,p_2=7$.

(Ⅱ)$Q_1=5,Q_2=4,p_1=p_2=8$.

(14)递增区间为$(-\infty,-1),(0,+\infty)$;递减区间为$(-1,0)$;极小值为$f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$;极大值为$f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$;渐近线为$y_1=e^{\pi}(x-2),y_2=x-2$.

(15)$\ln(2+\sqrt{2})$. (16)证明略.

(17)(Ⅰ)当$a\neq-4$时,$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,且表示唯一.

(Ⅱ)当$a=-4$时,若$3b-c\neq1$,$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

(Ⅲ)当$a=-4$且$3b-c=1$时,$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,但表示不唯一.

$$\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1-(2t+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(2b+1)\boldsymbol{\alpha}_3\ (t\text{ 为任意常数}).$$

(18)$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$. (19)证明略.

2001年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1~5小题,每小题3分,共15分.

(1)设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$,其中 Q 是产出量,L 是劳动投入量,K 是资本投入量,而 A,α,β 均为大于零的参数,则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为________. P41,55题

(2)某公司每年的工资总额在比上一年增加20%的基础上再追加2百万元.若以 W_t 表示第 t 年的工资总额(单位:百万元),则 W_t 满足的差分方程是________. P137,29题

(3)设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

且 $r(A)=3$,则 $k=$________. P164,38题

(4)设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2,方差分别为 1 和 4,而相关系数为 -0.5,则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant$________. P290,5题

(5)设总体 X 服从正态分布 $N(0,2^2)$,而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则随机变量

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$$

服从________分布,参数为________. P293,5题

二、选择题:6~10小题,每小题3分,共15分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,则 P45,75题

(A)$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B)$x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C)$(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(7)设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x<1, \\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内 P74,45题

(A)无界. (B)递减. (C)不连续. (D)连续.

(8)设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}, P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于 P159,19 题

(A) $A^{-1}P_1P_2$. (B) $P_1A^{-1}P_2$. (C) $P_1P_2A^{-1}$. (D) $P_2A^{-1}P_1$.

(9) 设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量. 若 $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=r(A)$，则线性方程组 P183,5 题

(A) $AX=\alpha$ 必有无穷多解. (B) $AX=\alpha$ 必有唯一解.

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 仅有零解. (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

(10) 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

P286,20 题

(A) -1. (B) 0. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

三、解答题：11～20 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)（本题满分 5 分）

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数. 又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$$e^{xy}-xy=2 \text{ 和 } e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt,$$

求 $\frac{du}{dx}$. P92,32 题

(12)（本题满分 6 分）

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 c 的值. P16,46 题

(13)（本题满分 6 分）

求二重积分 $\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

P107,23 题

(14)（本题满分 7 分）

已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

（Ⅰ）问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值？

（Ⅱ）求出此最大值. P46,76 题

(15)（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx\ (k>1),$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$. P58,111 题

(16)（本题满分 7 分）

已知 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x\ (n \text{ 为正整数}),$$

且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和. P121,21 题

(17)(本题满分 9 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，试求

(Ⅰ) a 的值；

(Ⅱ) 正交矩阵 Q，使 $Q^{T}AQ$ 为对角矩阵. P212,30 题

(18)(本题满分 8 分)

设 A 为 n 阶实对称矩阵，$r(A)=n$，A_{ij} 是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

(Ⅰ) 记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(X)$ 的矩阵为 A^{-1}；

(Ⅱ) 二次型 $g(X)=X^{T}AX$ 与 $f(X)$ 的规范形是否相同？说明理由. P220,3 题

(19)(本题满分 8 分)

一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977. ($\Phi(2)=0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数) P290,6 题

(20)(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布，试求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$. P272,33 题

答案速查

一、填空题

(1)$-\frac{\alpha}{\beta}$.　(2)$W_t=1.2W_{t-1}+2$.　(3)-3.　(4)$\frac{1}{12}$.　(5)F;$(10,5)$.

二、选择题

(6)(B).　(7)(D).　(8)(C).　(9)(D).　(10)(A).

三、解答题

(11)$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}$.　(12)$\frac{1}{2}$.　(13)$-\frac{2}{3}$.

(14)(Ⅰ)$q=3$,$p=-\frac{4}{5}$.　(Ⅱ)最大值 $S=\frac{225}{32}$.　(15)证明略.　(16)$-e^x\ln(1-x)$.

(17)(Ⅰ)$a=-2$.　(Ⅱ)$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

(18)(Ⅰ)$f(\boldsymbol{X})=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,证明略.　(Ⅱ)相同,理由略.

(19)98 箱.　(20)$p(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u), & 0<u<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1～5 小题,每小题 4 分,共 20 分.

(1)设常数 $a\neq\frac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$__________. P17,51 题

(2)交换积分次序:$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________. P103,8 题

(3)设 3 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix},$$

3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$. 已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则 $a=$__________. P171,12 题

(4)设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2)=$__________. P286,21 题

(5)设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\0, & x<\theta,\end{cases}$ 而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则未知参数 θ 的矩估计量为__________. P298,3 题

二、选择题:6～9 小题,每小题 4 分,共 16 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义,在开区间 (a,b) 内可导,则 P61,120 题

(A)当 $f(a)f(b)<0$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

(B)对任何 $\xi\in(a,b)$,有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

(C)当 $f(a)=f(b)$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=0$.

(D)存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则线性方程组 $\boldsymbol{AB}x=\boldsymbol{0}$ P183,6 题

(A)当 $n>m$ 时仅有零解.

(B)当 $n>m$ 时必有非零解.

(C)当 $m>n$ 时仅有零解.

(D)当 $m>n$ 时必有非零解.

(8)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量,则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 P203,13 题

(A)$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(B)$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(C)$\boldsymbol{P\alpha}$.

(D)$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(9)设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则 P293，6 题

(A)$X+Y$ 服从正态分布.　　(B)X^2+Y^2 服从 χ^2 分布.

(C)X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布.　　(D)X^2/Y^2 服从 F 分布.

三、解答题：10～19 小题，共 114 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(10)(本题满分 8 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$. P15，42 题

(11)(本题满分 10 分)

设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$. P92，33 题

(12)(本题满分 9 分)

设 $f(\sin^2x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$. P67，19 题

(13)(本题满分 11 分)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(Ⅰ)试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(Ⅱ)问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值. P79，58 题

(14)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$$y''+y'+y=e^x;$$

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数. P124，27 题

(15)(本题满分 13 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数性质，证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^bg(x)\mathrm{d}x$. P81，66 题

(16)(本题满分 13 分)

设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\\qquad\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq0,b\neq0,n\geqslant2$. 试讨论 a,b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多解？在有无穷多解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解. P188，15 题

(17)(本题满分 13 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值； P213，31 题

(Ⅱ)当 k 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. P228，20 题

(18)(本题满分 13 分)

假设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1,\\ 1, & U>-1,\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & U\leqslant 1,\\ 1, & U>1.\end{cases}$$

试求(Ⅰ)X 和 Y 的联合概率分布；

(Ⅱ)$D(X+Y)$.　　P260,7 题

(19)(本题满分 13 分)

假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间(EX)为 5 小时. 设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.　　P254,31 题

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

答案速查

一、填空题

(1)$\dfrac{1}{1-2a}$.　(2)$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　(3)$-1$.　(4)$-0.02$.　(5)$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-1$ 或 $\overline{X}-1$.

二、选择题

(6)(B).　(7)(D).　(8)(B).　(9)(C).

三、解答题

(10)$\dfrac{\pi}{6}$.　(11)$\mathrm{d}u=\left(f'_x+f'_z\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}\right)\mathrm{d}x+\left(f'_y-f'_z\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}\right)\mathrm{d}y$.

(12)$-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$($C$ 为任意常数).

(13)(Ⅰ)$V_1=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)$，$V_2=\pi a^4$.　(Ⅱ)$a=1$，$\dfrac{129}{5}\pi$.

(14)(Ⅰ)验证略.　(Ⅱ)和函数为 $y(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^{x}(-\infty<x<+\infty)$.　(15)证明略.

(16)当 $a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时，方程组仅有零解.

当 $a=b$ 时，全部解是 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$($c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 为任意常数)，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $a=(1-n)b$ 时，全部解是 $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{\beta}$($c$ 为任意常数)，其中 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

(17)(Ⅰ)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=0$.　(Ⅱ)$k>2$.

(18)(Ⅰ)$(X,Y)\sim\begin{bmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4}\end{bmatrix}$.　(Ⅱ)$D(X+Y)=2$.

(19)$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-e^{-\frac{y}{5}}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1～6 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(1)设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是________. P29,6 题

(2)已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$________. P37,39 题

(3)设 $a>0$, $f(x)=g(x)=\begin{cases} a, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 而 D 表示全平面,则 $I=\iint\limits_{D} f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________. P108,24 题

(4)设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$, $a<0$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $a=$________. P157,15 题

(5)设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为________. P286,22 题

(6)设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则当 $n\to\infty$ 时, $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于________. P290,7 题

二、选择题:7～12 小题,每小题 4 分,共 24 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(7)设 $f(x)$ 为不恒为零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ P24,72 题

(A)在 $x=0$ 处左极限不存在. (B)有跳跃间断点 $x=0$.

(C)在 $x=0$ 处右极限不存在. (D)有可去间断点 $x=0$.

(8)设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是 P95,41 题

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零. (B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零. (D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

(9)设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$, $q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$, $n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是 P116,7 题

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

(D)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

(10)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1,则必有 P164,39 题

(A)$a=b$ 或 $a+2b=0$.　　(B)$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$.

(C)$a\neq b$ 且 $a+2b=0$.　　(D)$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

P172,13 题

(11)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量,下列结论不正确的是

(A)若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

(12)将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件

P242,36 题

(A)A_1,A_2,A_3 相互独立.　　(B)A_2,A_3,A_4 相互独立.

(C)A_1,A_2,A_3 两两独立.　　(D)A_2,A_3,A_4 两两独立.

三、解答题:13~22 小题,共 102 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(13)(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)},x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$,试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.　P24,73 题

(14)(本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$,求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

P89,20 题

(15)(本题满分 8 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$.　P108,25 题

(16)(本题满分 9 分)

求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.　P122,22 题

(17)(本题满分 9 分)

设 $F(x)=f(x)g(x)$,其中 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x),\text{且 } f(0)=0,f(x)+g(x)=2e^x.$$

(Ⅰ)求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(Ⅱ)求出 $F(x)$ 的表达式.　P132,8 题

(18)(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,f(3)=1$,试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使

$$f'(\xi)=0.$$

P58,112 题

(19)(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$,讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时,

(Ⅰ)方程组仅有零解;

（Ⅱ）方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系. P189，16 题

(20)（本题满分 13 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^{T}AX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

（Ⅰ）求 a,b 之值；

（Ⅱ）利用正交变换将二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵. P220，4 题

(21)（本题满分 13 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数. 求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数. P255，32 题

(22)（本题满分 13 分）

设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$. P273，34 题

答案速查

一、填空题

(1)$\lambda>2$.　(2)$4a^6$.　(3)a^2.　(4)-1.　(5)0.9.　(6)$\frac{1}{2}$.

二、选择题

(7)(D).　(8)(A).　(9)(B).　(10)(C).　(11)(B).　(12)(C).

三、解答题

(13)定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$.　(14)x^2+y^2.　(15)$\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$.

(16)$f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)(|x|<1)$. 极大值为 1.

(17)(Ⅰ)$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$.　(Ⅱ)$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.　(18)证明略.

(19)(Ⅰ)当 $b\neq 0$ 且 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 时,方程组仅有零解.

(Ⅱ)当 $b=0$ 时,基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$,$\cdots$,$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}$.

当 $b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 时,基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

(20)(Ⅰ)$a=1$;$b=2$.

(Ⅱ)正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$,且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

(21)分布函数为 $G(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$　(22)$g(u)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$.

2004年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1~6小题,每小题4分,共24分.

(1)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则$a=$________,$b=$________. P16,47题

(2)函数$f(u,v)$由关系式$f[xg(y),y]=x+g(y)$确定,其中函数$g(y)$可微,且$g(y)\neq 0$.则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$________.

P89,21题

(3)设$f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\mathrm{d}x=$________. P70,30题

(4)二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩为________. P221,5题

(5)设随机变量X服从参数为λ的指数分布,则$P\{X>\sqrt{DX}\}=$________. P252,24题

(6)设总体X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2)$,总体Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则$E\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=$________. P294,10题

二、选择题:7~14小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(7)函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界? P5,4题

(A)$(-1,0)$. (B)$(0,1)$. (C)$(1,2)$. (D)$(2,3)$.

(8)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 P24,74题

(A)$x=0$必是$g(x)$的第一类间断点. (B)$x=0$必是$g(x)$的第二类间断点.

(C)$x=0$必是$g(x)$的连续点. (D)$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关.

(9)设$f(x)=|x(1-x)|$,则 P47,80题

(A)$x=0$是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(B)$x=0$不是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(C)$x=0$是$f(x)$的极值点,且$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D)$x=0$不是$f(x)$的极值点,$(0,0)$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(10)设有以下命题:

①若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛；

③若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

④若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是 P116,8 题

(A)①②. (B)②③. (C)③④. (D)①④.

(11)设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是 P29,7 题

(A)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$.

(D)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$.

(12)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有 P159,20 题

(A)当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$.

(B)当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C)当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(D)当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(13)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 P197,27 题

(A)不存在. (B)仅含一个非零解向量.

(C)含有两个线性无关的解向量. (D)含有三个线性无关的解向量.

(14)设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于 P252,25 题

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D)$u_{1-\alpha}$.

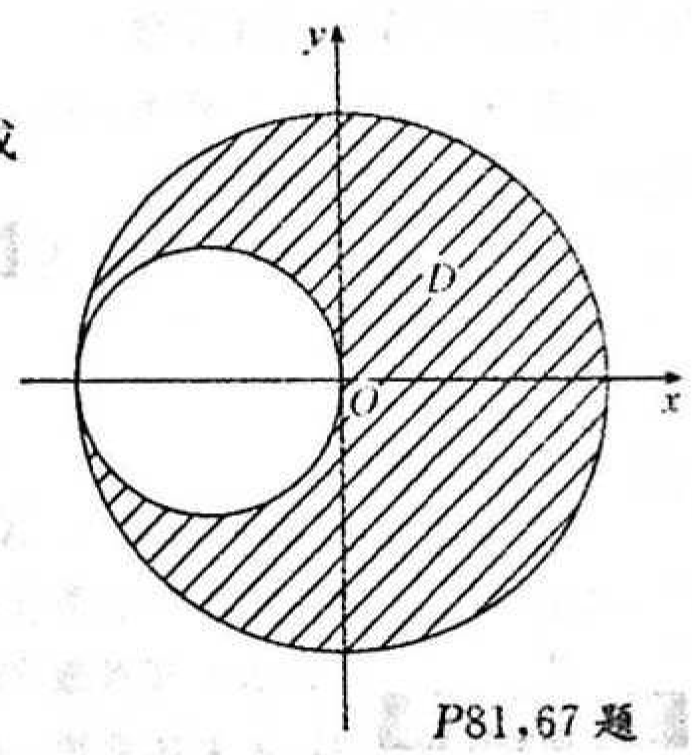
三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$. P10,25 题

(16)(本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域，如图所示. P109,26 题



(17)(本题满分 8 分)

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b),$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

证明：$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x.$$ P81,67 题

(18)(本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，Q 为需求量.

(Ⅰ)求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d>0)$；

(Ⅱ)推导$\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$(其中 R 为收益),并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时,降低价格反而使收益增加. P41,56 题

(19)(本题满分 9 分)

设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求:

(Ⅰ)$S(x)$所满足的一阶微分方程;

(Ⅱ)$S(x)$的表达式. P124,28 题

(20)(本题满分 13 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$,试讨论当 a,b 为何值时,

(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示,并求出表达式;

(Ⅲ)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表达式不唯一,并求出表达式. P177,25 题

(21)(本题满分 13 分)

设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵. P207,19 题

(22)(本题满分 13 分)

设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ)$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布. P261,8 题

(23)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\leqslant\alpha,\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)当 $\alpha=1$ 时,求未知参数 β 的矩估计量;

(Ⅱ)当 $\alpha=1$ 时,求未知参数 β 的最大似然估计量;

(Ⅲ)当 $\beta=2$ 时,求未知参数 α 的最大似然估计量. P298,4 题

答案速查

一、填空题

(1)1;-4.　(2)$-\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}$.　(3)$-\dfrac{1}{2}$.　(4)2.　(5)$\dfrac{1}{e}$.　(6)σ^2.

二、选择题

(7)(A).　(8)(D).　(9)(C).　(10)(B).　(11)(D).　(12)(D).　(13)(B).　(14)(C).

三、解答题

(15)$\dfrac{4}{3}$.　(16)$\dfrac{16}{9}(3\pi-2)$.　(17)证明略.

(18)(Ⅰ)$E_d=\dfrac{P}{20-P}$.　(Ⅱ)证明略.

(19)(Ⅰ)$S'(x)=xS(x)+\dfrac{x^3}{2}$,$S(0)=0$.　(Ⅱ)$S(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-\dfrac{x^2}{2}-1(-\infty<x<+\infty)$.

(20)(Ⅰ)$a=0$.　(Ⅱ)$a\neq0$ 且 $a\neq b$.　(Ⅲ)$a=b\neq0$. $\boldsymbol{\beta}=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\dfrac{1}{a}+k\right)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k 为任意常数.

(21)(Ⅰ)对应于 $\lambda_1=1+(n-1)b$ 的全部特征向量为 $k\xi_1=k(1,1,\cdots,1)^T$(k 为任意非零常数);

对应于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$ 的全部特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n$($k_2,k_3,\cdots,k_n$ 是不全为零的常数),$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^T,\cdots,\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^T$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$.

(22)(Ⅰ)(X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1
0	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{12}$
1	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{12}$

(Ⅱ)$\rho_{XY}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

(Ⅲ)Z 的概率分布为

Z	0	1	2
P	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{12}$

(23)(Ⅰ)β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.　(Ⅱ)$\beta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

(Ⅲ)α 的最大似然估计量为 $\hat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题：1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(1)极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________. P11,26 题

(2)微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为________. P132,9 题

(3)设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\Big|_{(1,0)}=$________. P87,11 题

(4)设行向量组 $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a\neq1$，则 $a=$________. P172,14 题

(5)从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$________. P240,26 题

(6)设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 $a=$________，$b=$________. P262,9 题

二、选择题：7～13 小题，每小题 4 分，共 28 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(7)当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点？ P55,102 题

(A)2. (B)4. (C)6. (D)8.

(8)设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$，则 P101,2 题

(A)$I_3>I_2>I_1$. (B)$I_1>I_2>I_3$. (C)$I_2>I_1>I_3$. (D)$I_3>I_1>I_2$.

(9)设 $a_n>0,n=1,2,\cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是 P117,9 题

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散. (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛. (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

(10)设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是 P46,77 题

(A)$f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值. (B)$f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值.

(C) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值.　　　　(D) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值.

(11)以下四个命题中，正确的是　　　　P5,5 题

(A)若 $f'(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(B)若 $f(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(C)若 $f'(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(D)若 $f(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界.

(12)设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$满足 $A^*=A^{T}$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，A^{T} 为 A 的转置矩阵. 若 a_{11},a_{12},a_{13}为三个相等的正数，则 a_{11} 为　　　　P147,17 题

(A)$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　　　(B)3.　　　　(C)$\frac{1}{3}$.　　　　(D)$\sqrt{3}$.

(13)设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是　　　　P172,15 题

(A)$\lambda_1=0$.　　　　(B)$\lambda_2=0$.　　　　(C)$\lambda_1\neq0$.　　　　(D)$\lambda_2\neq0$.

三、解答题：15～22 小题，共 98 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(14)(本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.　　　　P11,27 题

(15)(本题满分 8 分)

设 $f(u)$具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.　　　　P89,22 题

(16)(本题满分 9 分)

计算二重积分$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$.　　　　P109,27 题

(17)(本题满分 9 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数 $S(x)$.　　　　P122,23 题

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x),g(x)$在$[0,1]$上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant0$，$g'(x)\geqslant0$. 证明：对任何$a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx\geqslant f(a)g(1).$$

P81,68 题

(19)(本题满分 14 分)

已知齐次线性方程组

$$\text{(i)}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\text{和(ii)}\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.　　　　P198,29 题

(20)(本题满分 14 分)

设 $D=\begin{pmatrix}A & C\\C^{T} & B\end{pmatrix}$为正定矩阵，其中 A,B 为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(Ⅰ)计算 $P^{T}DP$，其中 $P=\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}C\\O & E_n\end{pmatrix}$；

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果判断矩阵 $B-C^{T}A^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.　　　　P228,21 题

(21)(本题满分 13 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求：

(Ⅰ)(X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅲ)$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle| X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$. P273,35 题

(22)(本题满分 13 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体 $N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$. 记$Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$.

(Ⅰ)求 Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

(Ⅱ)求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

(Ⅲ)若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c. P299,5 题

答案速查

一、填空题

(1)2.　(2)$xy=2$.　(3)$2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y$.　(4)$\frac{1}{2}$.　(5)$\frac{13}{48}$.　(6)0.4;0.1.

二、选择题

(7)(B).　(8)(A).　(9)(D).　(10)(B).　(11)(C).　(12)(A).　(13)(D).

三、解答题

(14)$\frac{3}{2}$.　(15)$\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$.　(16)$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.　(17)$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(18)证明略.　(19)$a=2,b=1,c=2$.　(20)(Ⅰ)$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$.　(Ⅱ)是正定,证明略.

(21)(Ⅰ)$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅱ)$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　(Ⅲ)$\frac{3}{4}$.

(22)(Ⅰ)$DY_i=\frac{n-1}{n}\sigma^2,i=1,2,\cdots,n$.　(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=-\frac{1}{n}\sigma^2$.　(Ⅲ)$c=\frac{n}{2(n-2)}$.

2006年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、填空题:1~6小题,每小题4分,共24分.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________. P17,52题

(2)设函数$f(x)$在$x=2$的某邻域内可导,且$f'(x)=e^{f(x)}$,$f(2)=1$,则$f'''(2)=$________. P35,31题

(3)设函数$f(u)$可微,且$f'(0)=\frac{1}{2}$,则$z=f(4x^2-y^2)$在点$(1,2)$处的全微分$\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=$________. P90,23题

(4)设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$,$E$为2阶单位矩阵,矩阵$B$满足$BA=B+2E$,则$|B|=$________. P147,18题

(5)设随机变量X与Y相互独立,且均服从区间$[0,3]$上的均匀分布,则$P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$________. P266,18题

(6)设总体X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$X$的简单随机样本,其样本方差为$S^2$,则$E(S^2)=$________. P294,11题

二、选择题:7~14小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(7)设函数$y=f(x)$具有二阶导数,且$f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx为自变量x在点x_0处的增量,Δy与$\mathrm{d}y$分别为$f(x)$在点x_0处对应的增量与微分,若$\Delta x>0$,则 P30,8题

(A)$0<\mathrm{d}y<\Delta y$. (B)$0<\Delta y<\mathrm{d}y$. (C)$\Delta y<\mathrm{d}y<0$. (D)$\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

(8)设函数$f(x)$在$x=0$处连续,且$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$,则 P30,9题

(A)$f(0)=0$且$f'_-(0)$存在. (B)$f(0)=1$且$f'_-(0)$存在.

(C)$f(0)=0$且$f'_+(0)$存在. (D)$f(0)=1$且$f'_+(0)$存在.

(9)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则级数 P117,10题

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛. (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛. (C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛. (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛.

(10)设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解$y_1(x)$,$y_2(x)$,C为任意常数,则该方程的通解是 P129,1题

(A)$C[y_1(x)-y_2(x)]$. (B)$y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.

(C)$C[y_1(x)+y_2(x)]$. (D)$y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.

(11)设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数,且$\varphi'_y(x,y)\neq 0$,已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点,下列选项正确的是 P98,47题

(A)若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$. (B)若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C)若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$. (D)若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(12)设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维列向量,$A$是$m\times n$矩阵,下列选项正确的是 P173,16题

(A)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关,则$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 P159,21 题

(A)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. (B)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$. (C)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$. (D)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

(14)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有 P252,26 题

(A)$\sigma_1<\sigma_2$. (B)$\sigma_1>\sigma_2$. (C)$\mu_1<\mu_2$. (D)$\mu_1>\mu_2$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 7 分)

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0,y>0$. 求：

(Ⅰ)$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

(Ⅱ)$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$. P11,28 题

(16)(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域. P109,28 题

(17)(本题满分 10 分)

证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$. P53,97 题

(18)(本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax(常数 $a>0$).

(Ⅰ)求 L 的方程；

(Ⅱ)当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值. P138,30 题

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$. P122,24 题

(20)(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示. P180,31 题

(21)(本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$；

(Ⅲ)求 A 及 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$，其中 E 为3阶单位矩阵. P213,32 题

(22)(本题满分13分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数. 求：

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,Y)$；

(Ⅲ)$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$. P255,33 题

(23)(本题满分13分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于1的个数. 求：

(Ⅰ)θ 的矩估计；

(Ⅱ)θ 的最大似然估计. P299,6 题

答案速查

一、填空题

(1)1.　(2)$2e^3$.　(3)$4dx-2dy$.　(4)2.　(5)$\frac{1}{9}$.　(6)2.

二、选择题

(7)(A).　(8)(C).　(9)(D).　(10)(B).　(11)(D).　(12)(A).　(13)(B).　(14)(A).

三、解答题

(15)(Ⅰ)$\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$.　(Ⅱ)$\pi$.　(16)$\frac{2}{9}$.　(17)证明略.

(18)(Ⅰ)L 的方程:$y=ax^2-ax$.　(Ⅱ)$a=2$.

(19)收敛域为$[-1,1]$;$S(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2)$,$x\in[-1,1]$.

(20)当 $a=0$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a=-10$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

(21)(Ⅰ)属于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$($k_1,k_2$ 不全为零),属于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$($k_3\neq0$),其中 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$;$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.　(Ⅲ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{E}$.

(22)(Ⅰ)$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt y}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{8\sqrt y}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　(Ⅱ)$\frac{2}{3}$.　(Ⅲ)$\frac{1}{4}$.　(23)(Ⅰ)$\hat\theta=\frac{3}{2}-\overline{X}$.　(Ⅱ)$\hat\theta=\frac{N}{n}$.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)当 $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 P20,61 题

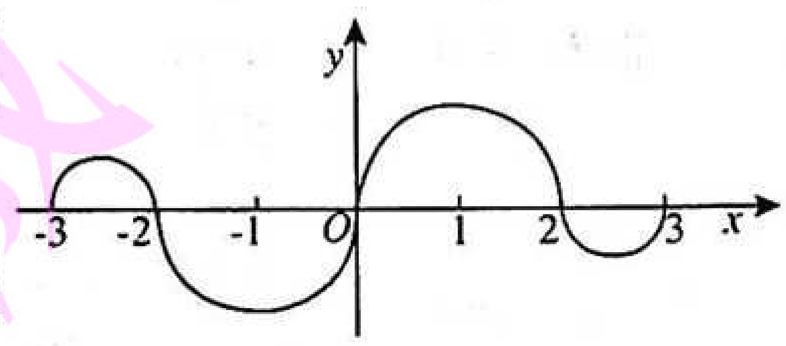
(A)$1-e^{\sqrt{x}}$. (B)$\ln(1+\sqrt{x})$. (C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D)$1-\cos\sqrt{x}$.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是 P30,10 题

(A)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$. (B)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在. (D)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(3)如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是 P63,3 题



(A)$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$. (B)$F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C)$F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$. (D)$F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.

(4)设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于 P103,9 题

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$. (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$. (D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(5)设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$，其中 Q,p 分别表示需求量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 1，则商品的价格是 P41,57 题

(A)10. (B)20. (C)30. (D)40.

(6)曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为 P51,90 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(7)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是 P173,17 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$. (D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(8)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ P229,22 题

(A)合同且相似.　　　　(B)合同,但不相似.

(C)不合同,但相似.　　　　(D)既不合同,也不相似.

(9)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第4次射击恰好第2次命中目标的概率为　　P242,37 题

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.　　(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.

(10)设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关,$f_X(x)$,$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下,X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为　　P266,19 题

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

二、填空题:11~16 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$______.　　P11,29 题

(12)设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$______.　　P35,32 题

(13)设 $f(u,v)$ 是二元函数,$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.　　P90,24 题

(14)微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\Big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$______.　　P132,10 题

(15)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 A^3 的秩为______.　　P165,40 题

(16)在区间(0,1)中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为______.　　P236,10 题

三、解答题:17~24 小题,共 86 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定,试判断曲线 $y=y(x)$ 在点(1,1)附近的凹凸性.　　P48,81 题

(18)(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.　　P110,29 题

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值,又 $f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$.证明:

(Ⅰ)存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $f(\eta)=g(\eta)$;

(Ⅱ)存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.　　P58,113 题

(20)(本题满分 10 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数,并指出其收敛区间.　　P128,38 题

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程组

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \qquad ②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解. P198,30 题

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$. P214,33 题

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1,0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X>2Y\}$；

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$. P274,36 题

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta, \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值.

(Ⅰ)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(Ⅱ)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.(相当于判断 $E(4\overline{X}^2)$ 是否为 θ^2) P300,7 题

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(D). (3)(C). (4)(B). (5)(D). (6)(D). (7)(A). (8)(B).
(9)(C). (10)(A).

二、填空题

(11)0. (12)$\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$. (13)$2\left(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'\right)$. (14)$\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$. (15)1. (16)$\frac{3}{4}$.

三、解答题

(17)凸. (18)$\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$. (19)证明略.

(20)$\frac{1}{x^2-3x-4}=-\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n, x\in(-1,3)$.

(21)当 $a=1$ 时,公共解为 $\boldsymbol{x}=k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数;当 $a=2$ 时,公共解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(22)(Ⅰ)验证略;属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$(k_1 为非零的任意常数),属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$k_2, k_3$ 为不全为零的任意常数.

(Ⅱ)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(23)(Ⅰ)$\frac{7}{24}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z), & 0<z<1,\\ (2-z)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(24)(Ⅰ)$\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$. (Ⅱ)不是,理由略.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________　分数________

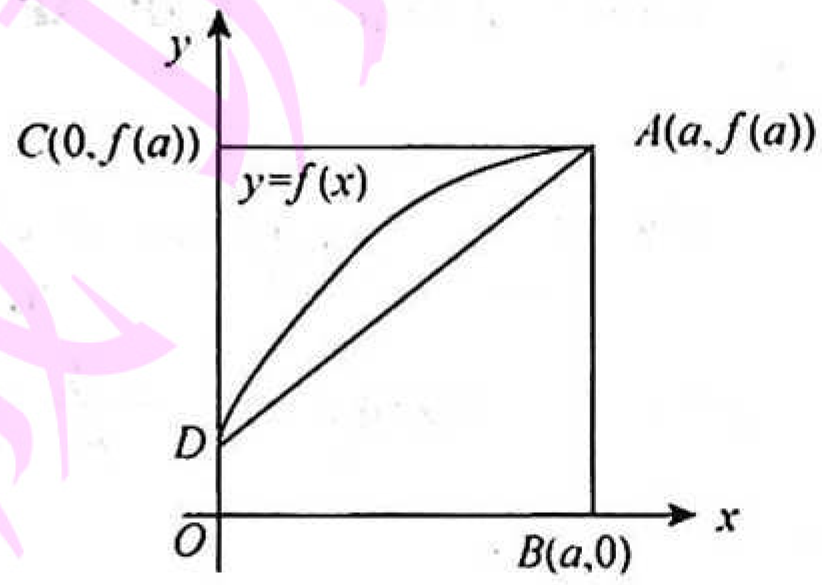
一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的　　P25,75 题

(A)跳跃间断点.　　(B)可去间断点.

(C)无穷间断点.　　(D)振荡间断点.

(2)如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于　　P64,4 题



(A)曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B)梯形 $ABOD$ 的面积.

(C)曲边三角形 ACD 的面积.

(D)三角边 ACD 的面积.

(3)已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$,则　　P85,1 题

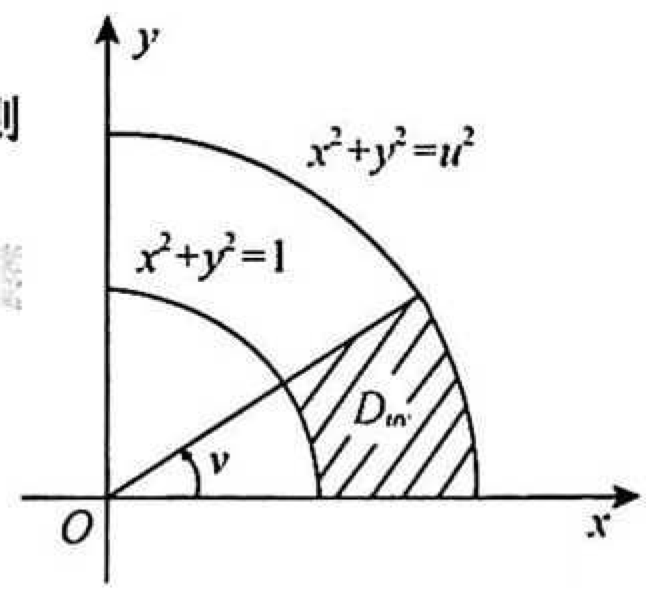
(A)$f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$都存在.

(B)$f'_x(0,0)$不存在,$f'_y(0,0)$存在.

(C)$f'_x(0,0)$存在,$f'_y(0,0)$不存在.

(D)$f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$都不存在.

(4)设函数 f 连续,若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$　　P90,25 题



(A)$vf(u^2)$.　　(B)$\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C)$vf(u)$.　　(D)$\dfrac{v}{u}f(u)$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则　　P158,16 题

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(6)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为　　P229,23 题

(A)$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　(C)$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　(D)$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 P274,37 题

(A)$F^2(x)$. (B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$. (D)$[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则 P286,23 题

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$. (B)$P\{Y=2X-1\}=1$.

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$. (D)$P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$________. P25,76 题

(10)设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=$________. P70,31 题

(11)设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$,则 $\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________. P110,30 题

(12)微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________. P133,11 题

(13)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,2,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则 $|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________. P147,19 题

(14)设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=E(X^2)\}=$________. P282,10 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$. P11,30 题

(16)(本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数,且 $\varphi'\neq-1$.

(Ⅰ)求 $\mathrm{d}z$;

(Ⅱ)记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. P93,34 题

(17)(本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$. P111,31 题

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(Ⅰ)证明对任意的实数 t,有 $\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)证明 $G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数. P82,69 题

(19)(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r=0.05$,并依年复利计算.某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元,第二年提取 28 万元,…,第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元,并能按此规律一直提取下去,问 A 至少应为多少万元?

P127,35 题

(20)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式$|A|=(n+1)a^n$; P144,6 题

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解. P149,27 题

(21)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵,α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值$-1,1$ 的特征向量,向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(Ⅰ)证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关;

(Ⅱ)令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,求 $P^{-1}AP$. P174,18 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \text{记 } Z=X+Y.$$

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. P274,38 题

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 DT. P295,12 题

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(C). (3)(B). (4)(A). (5)(C). (6)(D). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)1. (10)$\frac{1}{2}\ln 3$. (11)$\frac{\pi}{4}$. (12)$\frac{1}{x}$. (13)3. (14)$\frac{1}{2e}$.

三、解答题

(15)$-\frac{1}{6}$. (16)(Ⅰ)$dz=\frac{1}{1+\varphi'}[(2x-\varphi')dx+(2y-\varphi')dy]$. (Ⅱ)$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}$.

(17)$\frac{19}{4}+\ln 2$. (18)证明略. (19)3 980 万元. (20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$a\neq 0, x_1=\frac{n}{(n+1)a}$.

(Ⅲ)$a=0$,通解为$\boldsymbol{x}=(0,1,0\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$($k$为任意常数).

(21)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$\frac{1}{2}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\frac{2}{n(n-1)}$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的.

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$的可去间断点的个数为 P25,77 题

(A)1. (B)2. (C)3. (D)无穷多个.

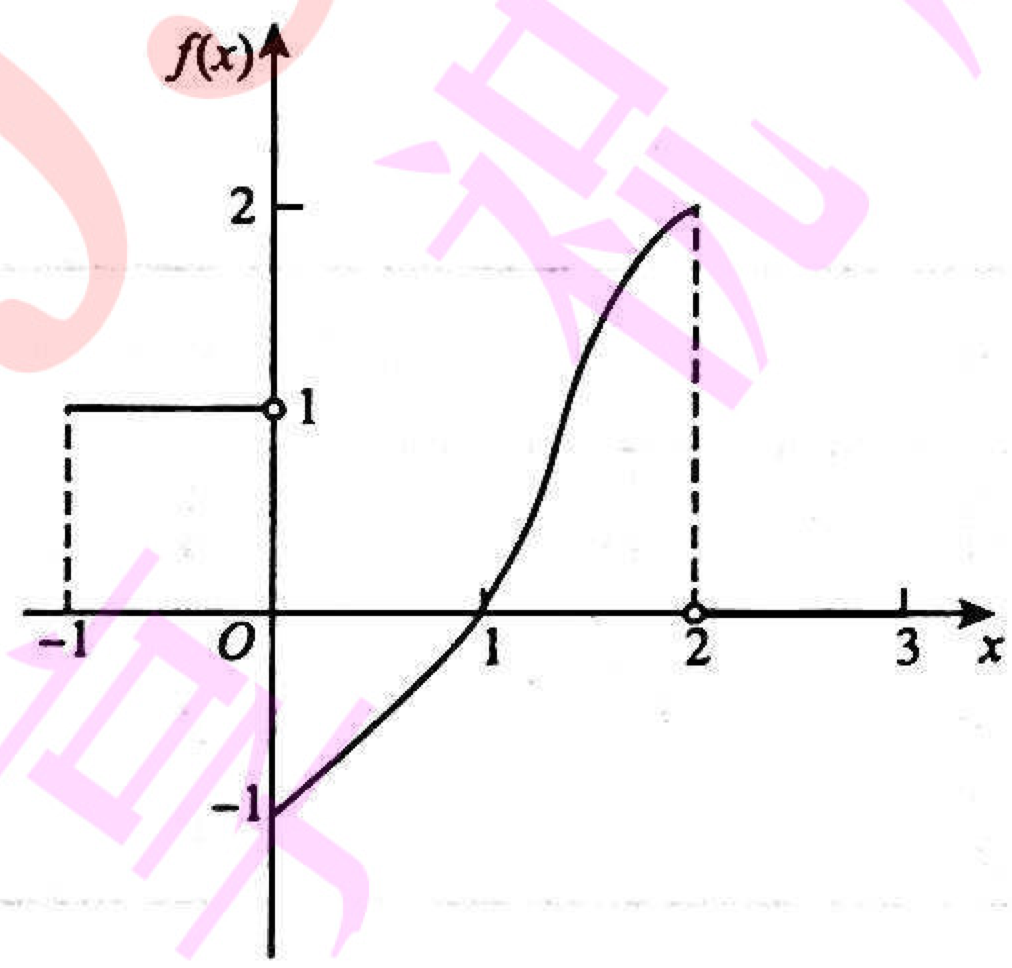
(2)当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小,则 P20,62 题

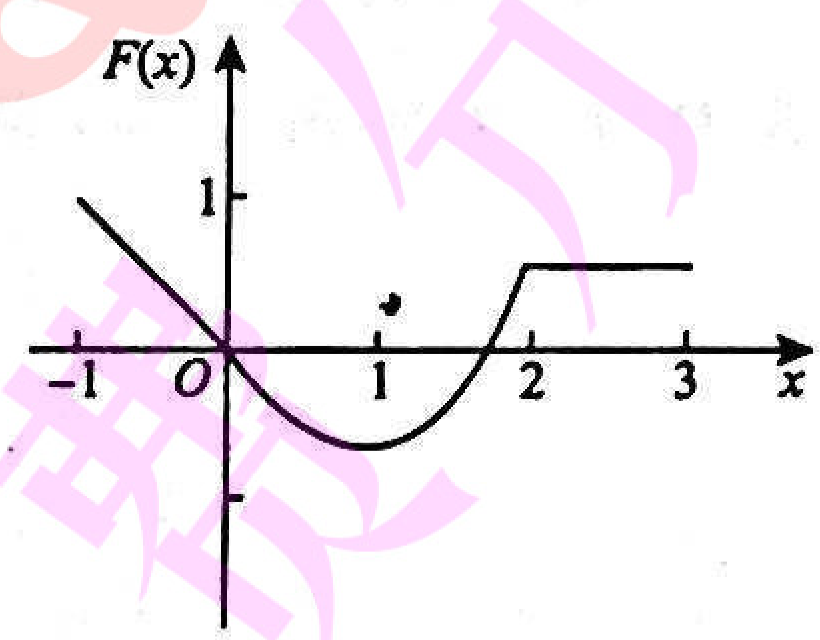
(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. (B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$. (C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. (D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3)使不等式$\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是 P64,5 题

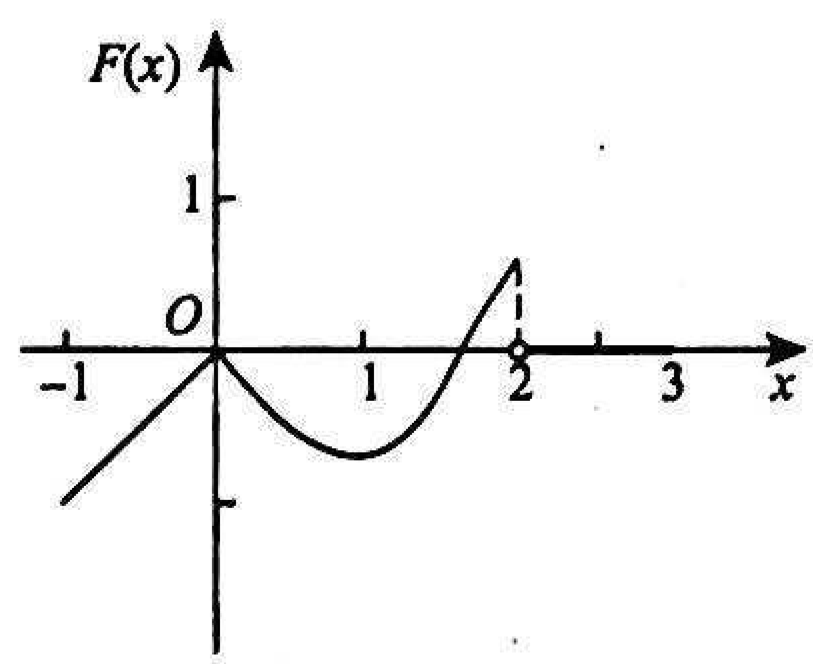
(A)$(0,1)$. (B)$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$. (C)$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. (D)$(\pi,+\infty)$.

(4)设函数 $y=f(x)$在区间$[-1,3]$上的图形如图所示,则函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为 P75,46 题

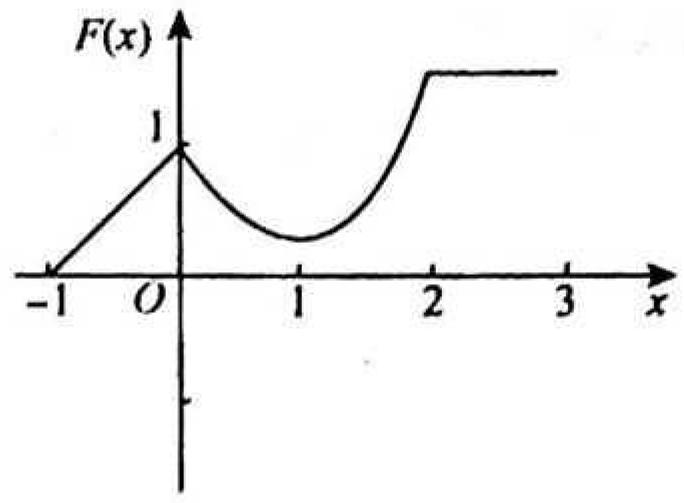




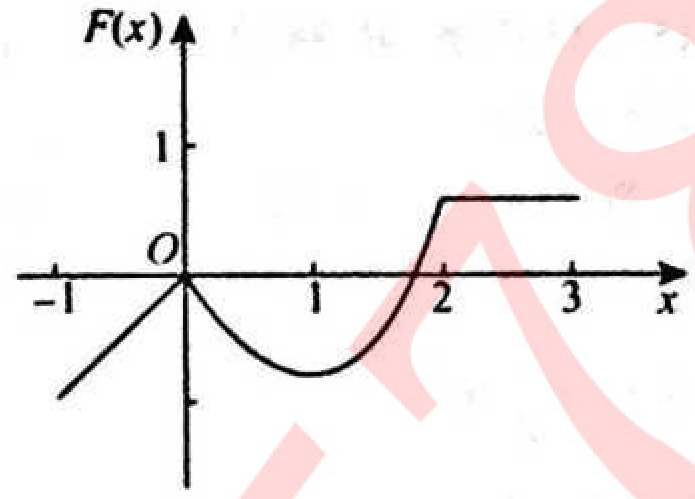
(A)



(B)



(C)



(D)

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

P153,5 题

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为

P159,22 题

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(7)设事件 A 与事件 B 互不相容，则　P240,27 题

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$.　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$.　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为　P275,39 题

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.　P12,31 题

(10)设 $z=(x+e^y)^x$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________.　P87,12 题

(11)幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________.　P121,20 题

(12)设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为 10 000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加________元.　P41,58 题

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$，若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $k=$________.　P208,20 题

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $ET=$________.　P295,13 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值. P95,42 题

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$. P67,20 题

(17)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,y\geqslant x\}$. P111,32 题

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

P59,114 题

(19)(本题满分 10 分)

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

P138,31 题

(20)(本题满分 11 分)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关. P190,17 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值. P221,6 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅰ)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(Ⅱ)求条件概率 $P\{X\leqslant 1|Y\leqslant 1\}$. P267,20 题

(23)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次，每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求 $P\{X=1|Z=0\}$；

(Ⅱ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布. P262,10 题

答案速查

一、选择题

(1)(C).　(2)(A).　(3)(A).　(4)(D).　(5)(B).　(6)(A).　(7)(D).　(8)(B).

二、填空题

(9)$\frac{3e}{2}$.　(10)$1+2\ln 2$.　(11)e^{-1}.　(12)8 000.　(13)2.　(14)np^2.

三、解答题

(15)极小值为$-\frac{1}{e}$.　(16)$x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C$,其中$C$为任意常数.

(17)$-\frac{8}{3}$.　(18)证明略.　(19)曲线方程为$x=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3\sqrt{y}}$.

(20)(Ⅰ)$\xi_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+C_1(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,其中$C_1$为任意常数;

$\xi_3=C_2(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+C_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$,其中$C_2,C_3$为任意常数.

(Ⅱ)证明略.

(21)(Ⅰ)$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.　(Ⅱ)$a=2$.

(22)(Ⅰ)$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　(Ⅱ)$\frac{e-2}{e-1}$.

(23)(Ⅰ)$\frac{4}{9}$.

(Ⅱ)(X,Y)的概率分布为:

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$,则 a 等于 P16,48 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2)设 y_1,y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则 P130,2 题

(A)$\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$. (B)$\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$.

(C)$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$. (D)$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$.

(3)设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数,且 $g''(x)<0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 P46,78 题

(A)$f'(a)<0$. (B)$f'(a)>0$.

(C)$f''(a)<0$. (D)$f''(a)>0$.

(4)设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有 P6,9 题

(A)$g(x)<h(x)<f(x)$. (B)$h(x)<g(x)<f(x)$.

(C)$f(x)<g(x)<h(x)$. (D)$g(x)<f(x)<h(x)$.

(5)设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是 P174,19 题

(A)若向量组Ⅰ线性无关,则 $r\leqslant s$.

(B)若向量组Ⅰ线性相关,则 $r>s$.

(C)若向量组Ⅱ线性无关,则 $r\leqslant s$.

(D)若向量组Ⅱ线性相关,则 $r>s$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 P208,21 题

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ P252,27 题

(A)0. (B)$\frac{1}{2}$. (C)$\frac{1}{2}-e^{-1}$. (D)$1-e^{-1}$.

(8)设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若 P246,4 题

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足

(A)$2a+3b=4$. (B)$3a+2b=4$.

(C)$a+b=1$. (D)$a+b=2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}\,dt=\int_0^x x\sin t^2\,dt$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________. P33,24 题

(10)设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ $(e\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________. P79,59 题

(11)设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ________. P41,59 题

(12)若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ________. P48,82 题

(13)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________. P147,20 题

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=$ ________. P295,14 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$. P12,32 题

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)^3\,dx\,dy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成. P111,33 题

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值. P98,48 题

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\,dt$ $(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt$ $(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. P17,53 题

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\,dx=f(2)+f(3)$.

(Ⅰ)证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；(Ⅱ)证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$. P59,115 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

(Ⅰ)求 λ,a;(Ⅱ)求方程组 $Ax=b$ 的通解. P191,18 题

(21)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使 $Q^{T}AQ$ 为对角矩阵,若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{T}$, 求 a,Q.

P215,34 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$. P267,21 题

(23)(本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球,其中红、白、黑球的个数分别为 1,2,3. 现从箱中随机地取出 2 个球,记 X 为取出的红球个数,Y 为取出的白球个数.

(Ⅰ)求随机变量 (X,Y) 的概率分布;(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$. P263,11 题

答案速查

一、选择题

(1)(C).　(2)(A).　(3)(B).　(4)(C).　(5)(A).　(6)(D).　(7)(C).　(8)(A).

二、填空题

(9)-1.　(10)$\frac{\pi^2}{4}$.　(11)$pe^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.　(12)3.　(13)3.　(14)$\sigma^2+\mu^2$.

三、解答题

(15)e^{-1}.　(16)$\frac{14}{15}$.　(17)$u_{\max}=5\sqrt{5}$;$u_{\min}=-5\sqrt{5}$.

(18)(Ⅰ)$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \leqslant \int_0^1 t^n |\ln t| dt, n=1,2,\cdots$;理由略.　(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

(19)证明略.　(20)(Ⅰ)$\lambda=-1$;$a=-2$.　(Ⅱ)通解为 $x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21)$a=-1$;$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.　(22)$A=\frac{1}{\pi}$;$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$,$-\infty<y<+\infty$.

(23)(Ⅰ)(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{4}{45}$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则 P20,63 题

(A) $k=1,c=4$. (B) $k=1,c=-4$. (C) $k=3,c=4$. (D) $k=3,c=-4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$ P31,11 题

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是 P117,11 题

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为 P64,6 题

(A) $I<J<K$. (B) $I<K<J$. (C) $J<I<K$. (D) $K<J<I$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$ P160,23 题

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$. (B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$. (C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$. (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 P195,24 题

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$. (B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$. (D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是 P246,5 题

(A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$. (C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自该总体的简单随机样本，则对于统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$，有 P295,15 题

(A) $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$. (B) $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$.

(C) $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$.　　　　(D) $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ________.　　P32,17 题

(10) 设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$ ________.　　P87,13 题

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.　　P37,40 题

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.　　P79,60 题

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.　　P221,7 题

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ________.　　P287,24 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.　　P12,33 题

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$.

求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.　　P90,26 题

(17)（本题满分 10 分）

求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　P67,21 题

(18)（本题满分 10 分）

证明方程 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.　　P56,103 题

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足 $\displaystyle\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\}\ (0<t\leqslant 1)$. 求 $f(x)$ 的表达式.　　P112,34 题

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.　　P178,26 题

(21)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.　　P216,35 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布；

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

P263.12 题

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-y=0$,$x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(Ⅰ)求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

(Ⅱ)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

P267,22 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(B). (3)(A). (4)(B). (5)(D). (6)(C). (7)(D). (8)(D).

二、填空题

(9) $(1+3x)e^{3x}$. (10) $(1+2\ln 2)(dx-dy)$. (11) $y=-2x$. (12) $\frac{4}{3}\pi$.

(13) $3y_1^2$. (14) $\mu(\sigma^2+\mu^2)$.

三、解答题

(15) $-\frac{1}{2}$. (16) $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{(2,2)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(2,2)}\cdot\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

(17) $2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C$，其中 C 为任意常数.

(18)证明略. (19) $f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(20)(Ⅰ) $a=5$. (Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21)(Ⅰ)对应于 -1 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，对应于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，对应于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意非零常数. (Ⅱ) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ) (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ) $Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ) $\rho_{XY}=0$.

(23)(Ⅰ) $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (Ⅱ) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2(1-y)}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 P51,91 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ P31,12 题

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B)$(-1)^n(n-1)!$. (C)$(-1)^{n-1}n!$. (D)$(-1)^n n!$.

(3)设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\mathrm{d}r=$ P103,10 题

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

(4)已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 P118,12 题

(A)$0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$. (B)$\dfrac{1}{2}<\alpha\leqslant1$. (C)$1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2}$. (D)$\dfrac{3}{2}<\alpha<2$.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

P174,20 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. (C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

P204,14 题

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $P\{X^2+Y^2\leqslant1\}=$ P268,23 题

(A)$\dfrac{1}{4}$. (B)$\dfrac{1}{2}$. (C)$\dfrac{\pi}{8}$. (D)$\dfrac{\pi}{4}$.

(8)设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为 P293,7 题

(A)$N(0,1)$. (B)$t(1)$. (C)$\chi^2(1)$. (D)$F(1,1)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________. P13,34 题

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f[f(x)]$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=$ ________. P33,21 题

(11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=$ ________. P85,2 题

(12) 由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________. P79,61 题

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$ ________. P147,21 题

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$ ________. P240,28 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$. P13,35 题

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D e^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域. P112,35 题

(17)（本题满分 10 分）

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000（万元）. 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$（万元/件）与 $6+y$（万元/件）.

（Ⅰ）求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）；

（Ⅱ）当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小总成本；

（Ⅲ）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义. P98,49 题

(18)（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$. P53,98 题

(19)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点. P134,15 题

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

（Ⅱ）当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解. P192,19 题

2012年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 P51,91题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$ P31,12题

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B)$(-1)^n(n-1)!$. (C)$(-1)^{n-1}n!$. (D)$(-1)^n n!$.

(3)设函数 $f(t)$ 连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)rdr=$ P103,10题

(A) $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$. (B) $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$.

(C) $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$. (D) $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dx$.

(4)已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛,则 P118,12题

(A)$0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. (B)$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant1$. (C)$1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$. (D)$\frac{3}{2}<\alpha<2$.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

P174,20题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. (C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$

P204,14题

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从区间(0,1)上的均匀分布,则 $P\{X^2+Y^2\leqslant1\}=$ P268,23题

(A)$\frac{1}{4}$. (B)$\frac{1}{2}$. (C)$\frac{\pi}{8}$. (D)$\frac{\pi}{4}$.

(8)设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本,则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为 P293,7题

(A)$N(0,1)$. (B)$t(1)$. (C)$\chi^2(1)$. (D)$F(1,1)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________. P13,34 题

(10)设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f[f(x)]$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$ ________. P33,21 题

(11)设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz\Big|_{(0,1)}=$ ________. P85,2 题

(12)由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________. P79,61 题

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$ ________. P147,21 题

(14)设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$ ________. P240,28 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$. P13,35 题

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^x xy\,dx\,dy$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域. P112,35 题

(17)(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件)和 y(件)，且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$(万元/件)与 $6+y$(万元/件).

(Ⅰ)求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元)；

(Ⅱ)当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小总成本；

(Ⅲ)求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义. P98,49 题

(18)(本题满分 10 分)

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$. P53,98 题

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式；

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$ 的拐点. P134,15 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

(Ⅱ)当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解. P192,19 题

(21)(本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值；

(Ⅱ)求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形. P222,8 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$；

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$. P287,25 题

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布. 记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$.

(Ⅰ)求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

(Ⅱ)求 $E(U+V)$. P275,40 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(D). (5)(C). (6)(B). (7)(D). (8)(B).

二、填空题

(9)$e^{-\sqrt{2}}$. (10)$\frac{1}{e}$. (11)$2dx-dy$. (12)$4\ln 2$. (13)-27. (14)$\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{12}$. (16)$\frac{1}{2}$. (17)(Ⅰ)$C(x,y)=10\,000+20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}$.

(Ⅱ)当甲为 24 件,乙为 26 件时,总成本最小,为 11 118 万元.

(Ⅲ)边际成本为 32 万元,其经济意义为:当生产乙产品 26 件时,生产第 25 件甲产品需 32 万元.

(18)证明略. (19)(Ⅰ)$f(x)=e^x$. (Ⅱ)拐点为$(0,0)$.

(20)(Ⅰ)$|\boldsymbol{A}|=1-a^4$. (Ⅱ)$a=-1$,通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21)(Ⅰ)$a=-1$. (Ⅱ)$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,标准形为 $f=2y_1^2+6y_2^2$.

(22)(Ⅰ)$\frac{1}{4}$. (Ⅱ)$-\frac{2}{3}$.

(23)(Ⅰ)$f_V(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (Ⅱ)2.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________　分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 当 $x\to 0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是　P21,64 题

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$.　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为　P25,78 题

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

(3) 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k=1,2,3,4)$，则　P101,3 题

(A) $I_1>0$.　(B) $I_2>0$.　(C) $I_3>0$.　(D) $I_4>0$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是　P118,13 题

(A) 若 $a_n>a_{n+1}$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则　P178,27 题

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.　(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.　(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为　P208,22 题

(A) $a=0,b=2$.　(B) $a=0$，b 为任意常数.

(C) $a=2,b=0$.　(D) $a=2$，b 为任意常数.

(7) 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}(i=1,2,3)$，则　P253,28 题

(A) $p_1>p_2>p_3$.　(B) $p_2>p_1>p_3$.　(C) $p_3>p_1>p_2$.　(D) $p_1>p_3>p_2$.

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=$ P264,13 题

(A) $\frac{1}{12}$.　　(B) $\frac{1}{8}$.　　(C) $\frac{1}{6}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点(1,0)处有公共切线,则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ ________. P31,13 题

(10)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________. P93,35 题

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ________. P72,38 题

(12)微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ ________. P134,16 题

(13)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________. P147,22 题

(14)设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,则 $E(Xe^{2X})=$ ________. P282,11 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值. P21,65 题

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积.若 $V_y=10V_x$,求 a 的值. P80,62 题

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y$, $y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. P112,36 题

(18)(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60 000 元,可变成本为 20 元/件,价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1\,000}$(p 是单价,单位:元;Q 是销量,单位:件).已知产销平衡,求:

(Ⅰ)该商品的边际利润;

(Ⅱ)当 $p=50$ 时的边际利润,并解释其经济意义;

(Ⅲ)使得利润最大的定价 p. P42,60 题

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.证明:

(Ⅰ)存在 $a>0$,使得 $f(a)=1$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的 a,存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$. P60,116 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$.当 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$. P193,20 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$. P223.9 题

(22)（本题满分 11 分）

设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（Ⅰ）求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；

（Ⅱ）求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；

（Ⅲ）求 $P\{X>2Y\}$. P268.24 题

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. P300.8 题

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量.

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(C). (3)(B). (4)(D). (5)(B). (6)(B). (7)(A). (8)(C).

二、填空题

(9)-2. (10)$2(1-\ln 2)$. (11)$\ln 2$. (12)$(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数. (13)-1. (14)$2e^2$.

三、解答题

(15)$a=7;n=2$. (16)$7\sqrt{7}$. (17)$\frac{416}{3}$. (18)(Ⅰ)$-\frac{Q}{500}+40$. (Ⅱ)20 元,经济意义为:销售第 10 001 件商品时所得的利润为 20 元. (Ⅲ)$p=40$(元).

(19)证明略. (20)$a=-1,b=0,C=\begin{pmatrix}1+k_1+k_2 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$,$k_1,k_2$ 为任意常数. (21)证明略.

(22)(Ⅰ)$f(x,y)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (Ⅱ)$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (Ⅲ)$\frac{1}{8}$.

(23)(Ⅰ)$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. (Ⅱ)$\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且 $a\neq0$,则当 n 充分大时有 P6,10 题

(A)$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$. (B)$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$. (C)$a_n>a-\dfrac{1}{n}$. (D)$a_n<a+\dfrac{1}{n}$.

(2)下列曲线中有渐近线的是 P51,92 题

(A)$y=x+\sin x$. (B)$y=x^2+\sin x$. (C)$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$. (D)$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

(3)设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$.当 $x\to0$ 时,若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量,则下列选项中错误的是 P22,66 题

(A)$a=0$. (B)$b=1$. (C)$c=0$. (D)$d=\dfrac{1}{6}$.

(4)设函数 $f(x)$具有二阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间$[0,1]$上 P48,83 题

(A)当 $f'(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$. (B)当 $f'(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(C)当 $f''(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$. (D)当 $f''(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(5)行列式$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$ P144,7 题

(A)$(ad-bc)^2$. (B)$-(ad-bc)^2$. (C)$a^2d^2-b^2c^2$. (D)$b^2c^2-a^2d^2$.

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 P175,21 题

(A)必要非充分条件. (B)充分非必要条件.

(C)充分必要条件. (D)既非充分也非必要条件.

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=$ P240,29 题

(A)0.1. (B)0.2. (C)0.3. (D)0.4.

(8)设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$的简单随机样本,则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$服从的分布为 P293,8 题

(A)$F(1,1)$. (B)$F(2,1)$. (C)$t(1)$. (D)$t(2)$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)设某商品的需求函数为 $Q=40-2P$(P 为商品的价格),则该商品的边际收益为________. P42,61 题

(10)设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域,则 D 的面积为________. P80,63 题

(11)设$\int_0^a xe^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$,则 $a=$________. P70,32 题

(12)二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$__________. P103,11 题

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是__________.

P224,10 题

(14)设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 若 $E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$,则 $c=$__________.

P295,16 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. P15,43 题

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. P113,37 题

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数,且 $z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$. 若 $f(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式. P94,38 题

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数. P123,25 题

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明:

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$;

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. P82,70 题

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$. P194,21 题

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似. P209,23 题

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 EY. P276,41 题

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 的概率分布相同,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$,$P\{X=1\}=\frac{2}{3}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$. P264,14 题

答案速查

一、选择题

(1)(A). (2)(C). (3)(D). (4)(D). (5)(B). (6)(A). (7)(B). (8)(C).

二、填空题

(9)$20-Q$. (10)$\frac{3}{2}-\ln 2$. (11)$\frac{1}{2}$. (12)$\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$. (13)$-2\leqslant a\leqslant 2$. (14)$\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}$. (16)$-\frac{3}{4}$. (17)$f(u)=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4u}-4u-1)$.

(18)收敛域为$(-1,1)$;$S(x)=\frac{3-x}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$. (19)证明略.

(20)(Ⅰ)基础解系为$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&6&-1\\-1&-3&1\\-1&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha})$,$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数.

(21)证明略. (22)(Ⅰ)$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$ (Ⅱ)$\frac{3}{4}$.

(23)(Ⅰ)(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(Ⅱ)$\frac{4}{9}$.

2015 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

P8,11 题

(1)设$\{x_n\}$是数列.下列命题中不正确的是

(A)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

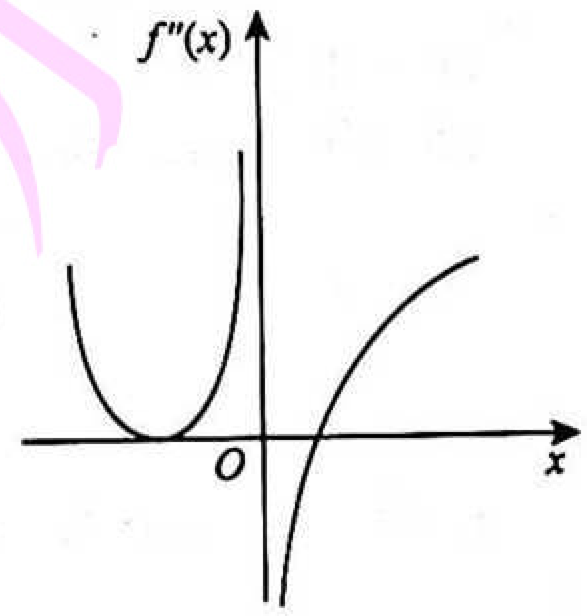
(B)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

(D)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其二阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示，则曲线$y=f(x)$的拐点个数为

P48,84 题



(A)0.

(B)1.

(C)2.

(D)3.

(3)设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x,x^2+y^2\leqslant 2y\}$，函数$f(x,y)$在$D$上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

P104,12 题

(A)$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(B)$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(C)$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(D)$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

P119,14 题

(4)下列级数中发散的是

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$.

(B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

(C)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$.

(D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

(5)设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为

P183,7 题

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$.

(B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$.

(D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(6)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为

P224,11 题

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

(B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

(D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7)若 A,B 为任意两个随机事件，则 P240,30 题

(A)$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$. (B)$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C)$P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$. (D)$P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8)设总体 $X\sim B(m,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$ P296,17 题

(A)$(m-1)n\theta(1-\theta)$. (B)$m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C)$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$. (D)$mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________. P13,36 题

(10)设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$. 若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$________. P75,47 题

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=$________. P93,36 题

(12)设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$________. P134,17 题

(13)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________. P148,23 题

(14)设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________. P269,25 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值. P22,67 题

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,y\geqslant x^2\}$. P113,38 题

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量，p 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性($\eta>0$).

(Ⅰ)证明定价模型为 $p=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

(Ⅱ)若该商品的成本函数为 $C(Q)=1\ 600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-p$，试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格. P42,62 题

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式. P138,32 题

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(Ⅱ)设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式. P31,14 题

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $A^3=O$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵,求 X. P162,29 题

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. P209,24 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;

(Ⅱ)求 EY. P282,12 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量. P300,9 题

答案速查

一、选择题

(1)(D).　(2)(C).　(3)(B).　(4)(C).　(5)(D).　(6)(A).　(7)(C).　(8)(B).

二、填空题

(9)$-\frac{1}{2}$.　(10)2.　(11)$-\frac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$.　(12)$e^{-2x}+2e^{x}$.　(13)21.　(14)$\frac{1}{2}$.

三、解答题

(15)$a=-1;b=-\frac{1}{2};k=-\frac{1}{3}$.　(16)$\iint\limits_{D}x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$.

(17)(Ⅰ)证明略.　(Ⅱ)$p=30$.

(18)$f(x)=\frac{8}{4-x},x\in I$.

(19)(Ⅰ)证明略.

(Ⅱ)$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

(20)(Ⅰ)$a=0$.　(Ⅱ)$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

(21)(Ⅰ)$a=4;b=5$.　(Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2},k=2,3,\cdots$.　(Ⅱ)$EY=16$.

(23)(Ⅰ)$\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.　(Ⅱ)$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

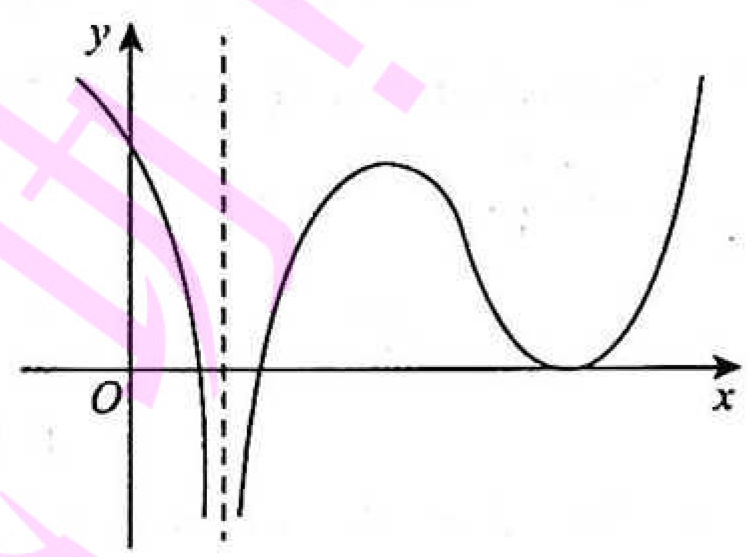
(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 P49,85 题

(A)函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(B)函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

(C)函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

(D)函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.



(2)已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则 P88,14 题

(A) $f'_x-f'_y=0$.　　(B) $f'_x+f'_y=0$.

(C) $f'_x-f'_y=f$.　　(D) $f'_x+f'_y=f$.

(3)设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$，

$D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则 P101,4 题

(A) $J_1<J_2<J_3$.　　(B) $J_3<J_1<J_2$.

(C) $J_2<J_3<J_1$.　　(D) $J_2<J_1<J_3$.

(4)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数） P119,15 题

(A)绝对收敛.　　(B)条件收敛.

(C)发散.　　(D)收敛性与 k 有关.

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是 P210,25 题

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，则 P225,12 题

(A) $a>1$.　　(B) $a<-2$.

(C) $-2<a<1$.　　(D) $a=1$ 或 $a=-2$.

(7)设 A,B 为两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，如果 $P(A\mid B)=1$，则 P240,31 题

(A) $P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$.　　(B) $P(A\mid\overline{B})=0$.

(C) $P(A\cup B)=1$.　　(D) $P(B\mid A)=1$.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=$ P288,26 题

(A)6. (B)8.

(C)14. (D)15.

二、填空题:9~14小题,每小题4分,共24分.

(9)已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________. P14,37 题

(10)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________. P18,54 题

(11)设函数 $f(u,v)$ 可微,$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定,则 $dz|_{(0,1)}=$________.

P94,37 题

(12)设 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant1,-1\leqslant x\leqslant1\}$,则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}\,dxdy=$________. P104,13 题

(13)行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________. P145,8 题

(14)设袋中有红、白、黑球各1个,从中有放回地取球,每次取1个,直到三种颜色的球都取到时停止,则取球次数恰好为4的概率为________. P236,11 题

三、解答题:15~23小题,共94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分10分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$. P14,38 题

(16)(本题满分10分)

设某商品的最大需求量为1 200件,该商品的需求函数 $Q=Q(p)$,需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$,$p$ 为单价(万元).

(Ⅰ)求需求函数的表达式;

(Ⅱ)求 $p=100$ 万元时的边际收益,并说明其经济意义. P42,63 题

(17)(本题满分10分)

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\,dt\,(x>0)$,求 $f'(x)$,并求 $f(x)$ 的最小值. P75,48 题

(18)(本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 连续,且满足 $\int_0^x f(x-t)\,dt=\int_0^x(x-t)f(t)\,dt+e^{-x}-1$,求 $f(x)$. P136,22 题

(19)(本题满分10分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数. P123,26 题

(20)(本题满分11分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$,且方程组 $Ax=\beta$ 无解. P194,22 题

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 A^{99};

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

P211,28 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布,令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(Ⅰ)写出(X,Y)的概率密度;

(Ⅱ)问 U 与 X 是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

P269,26 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$为未知参数. X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本,令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(Ⅰ)求 T 的概率密度;

(Ⅱ)确定 a,使得 $E(aT)=\theta$.

P301,10 题

答案速查

一、选择题

(1)(B).　(2)(D).　(3)(B).　(4)(A).　(5)(C).　(6)(C).　(7)(A).　(8)(C).

二、填空题

(9)6.　(10)$\sin 1-\cos 1$.　(11)$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.　(12)$\frac{1}{3}-\frac{2}{3\mathrm{e}}$.　(13)$4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$.　(14)$\frac{2}{9}$.

三、解答题

(15)$\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

(16)(Ⅰ)$Q=1\,200-10p$.　(Ⅱ)$R'(Q)=120-\frac{1}{5}Q$. 当 $p=100$ 时,$Q=200$,故当 $p=100$ 万元时的边际收益 $R'(200)=80$,其经济意义为:销售第 201 件商品所得的收益为 80 万元.

(17)$\frac{1}{4}$.　(18)$f(x)=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

(19)收敛域为$[-1,1]$;和函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & x\in(-1,1),\\ 2\ln 2, & x=\pm 1.\end{cases}$

(20)(Ⅰ)$a=0$.　(Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

(21)(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^{99}=\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.　(Ⅱ)$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$

(22)(Ⅰ)$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　(Ⅱ)U 与 X 不相互独立.

(Ⅲ)$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)$f_T(z)=\begin{cases}\frac{9z^8}{\theta^9}, & 0<z<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　(Ⅱ)$a=\frac{10}{9}$.

2017 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 P26,79 题

(A)$ab=\dfrac{1}{2}$. (B)$ab=-\dfrac{1}{2}$.

(C)$ab=0$. (D)$ab=2$.

(2)二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是 P96,43 题

(A)$(0,0)$. (B)$(0,3)$. (C)$(3,0)$. (D)$(1,1)$.

(3)设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则 P54,99 题

(A)$f(1)>f(-1)$. (B)$f(1)<f(-1)$.

(C)$|f(1)|>|f(-1)|$. (D)$|f(1)|<|f(-1)|$.

(4)若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛,则 $k=$ P119,16 题

(A)1. (B)2. (C)-1. (D)-2.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则 P158,17 题

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (B)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C)$\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (D)$\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则 P210,26 题

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. (B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. (D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7)设 A,B,C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立,B 与 C 相互独立,则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是 P242,38 题

(A)A 与 B 相互独立. (B)A 与 B 互不相容.

(C)AB 与 C 相互独立. (D)AB 与 C 互不相容.

(8)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则下列结论中不正确的是 P294,9 题

(A)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B)$2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D)$n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$ ________. P71,33 题

(10)差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$ ________. P136,25 题

(11)设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为________. P43,64 题

(12)设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$，$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$ ________.

P86,3 题

(13)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为________.

P180,32 题

(14)设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=a$，$P\{X=3\}=b$. 若 $EX=0$，则 $DX=$ ________.

P283,13 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$. P15,44 题

(16)(本题满分 10 分)

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

P113,39 题

(17)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. P18,55 题

(18)(本题满分 10 分)

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，试确定常数 k 的取值范围. P56,104 题

(19)(本题满分 10 分)

设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ)证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1；

(Ⅱ)证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$，并求 $S(x)$ 的表达式. P125,29 题

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(A)=2$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解. P196,25 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q. P225,13 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{Y\leqslant EY\}$；

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

P276,42 题

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$. 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ)求 Z_1 的概率密度；

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量.

P301,11 题

答案速查

一、选择题

(1)(A). (2)(D). (3)(C). (4)(C). (5)(A). (6)(B). (7)(C). (8)(B).

二、填空题

(9)$\frac{\pi^3}{2}$. (10)$C2^t+\frac{1}{2}t2^t$,其中 C 为任意常数. (11)$1+(1-Q)e^{-Q}$. (12)xye^y. (13)2. (14)$\frac{9}{2}$.

三、解答题

(15)$\frac{2}{3}$. (16)$\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi$. (17)$\frac{1}{4}$. (18)$\left(\frac{1}{\ln 2}-1,\frac{1}{2}\right)$. (19)证明略,$S(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

(20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21)$a=2$;$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$\frac{4}{9}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)$f(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$ (Ⅱ)σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$.

(Ⅲ)σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.