张宇数学教育系列丛书

2018

张宇考研数学真题大全解

解析分册·数学二

主编◯张宇　副主编◯高昆轮

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇考研数学真题大全解

解析分册·数学二

主编◎张宇　副主编◎高昆轮

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 解析分册. 数学二 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2017. 6

ISBN 978—7—5682—4128—1

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 122711 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 17
字　　数 / 425 千字
版　　次 / 2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
定　　价 / 62.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 孟雯雯
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前言（18版）

PREFACE

本书收集并详解了从 1987 到 2017 年，共 31 年的真题，称真题大全解。

我建议读者按照下面的方法来用这本珍贵的资料。

首先，要学完全部的考试内容，有了全面的知识结构以后，再来做这卷子，这是前提。

接下来，按照套卷的形式，一套一套地完成试卷，每做完 3 至 5 套卷子，给自己评一下分数，算一个平均值出来，做到心中有数，再去做下一个 3 至 5 套卷子，以期有更好的成绩，直至完成所有试卷。

第二遍，按照章节顺序去做题，有了上面第一遍做套卷的经验和教训，这一遍，重在薄弱环节的把握，局部加力，查漏补缺，对症下药。

这样，应能最好地发挥真题的作用。其他要紧的事情，请看上一版前言。

张宇

2017 年 5 月 于北京

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列 (高等数学(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	体现了本科教学要求与考研要求的差异,列出了章节学习的知识体系,给出了所有课后习题的全面解析,精选了不同数量的经典例题	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备与高分指南系列 (高等数学(微积分)(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据,以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考,设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题,命题具有通用性	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题组组长参与	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇考研数学题源探析经典1000题 (数学一、数学二、数学三)	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了1000道左右高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,由易到难,利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解。原命题组组长参与	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解 (数学一、数学二、数学三)	囊括考研数学命题以来所有考研真题,给读者提供原汁原味的实考题,有效掌握命题方向及解题思路。原命题组组长参与	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷 (数学一、数学二、数学三)	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上)。实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷 (数学一、数学二、数学三)	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下)。实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别。出版日期见封四。

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研图书交流论坛 *http://weibo.com/yuntubook/*

张宇新浪微博:@宇哥考研 *http://weibo.com/zhangyumaths/*

前言（17版）

先给读者讲个故事。1637年，法国律师费马到图书馆看书，在书上读到一句话：“方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解。”现在说来，小学生都知道：$3^2+4^2=5^2$，上述命题显然成立。然而，费马没有就此罢休，他违反图书馆规定，在书上“乱写乱画”：“你们不要以为这个事情很简单，方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解，方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解，…，也就是说，对于方程 $x^n+y^n=z^n$，只要 $n\geqslant3$ 为正整数，则这样的方程就一定没有正整数解了。”这等于是提出了一个前所未有的定理，是公然向数学界提出挑战。不仅如此，费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话：“我已经给上述定理做了完整美妙的证明，只是这个位置太小了，所以我就不写了。”——这哪里是挑战？简直就是挑衅！

数学界应战吗？那是当然，数学界绝不缺乏天才，怎么会被一个“外行”难倒？于是，读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼茨等均开始研究费马的这个定理，可是历史就是这么奇妙，他们都没有证明出来。一百年过去了，两百年过去了，三百年过去了，直到1993年，也就是在费马提出这个定理的356年之后，才被美籍英裔数学家威尔斯证明出来，单单证明就写了1 000多页。威尔斯的证明举世震惊，因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖（“唯一”是因为菲尔兹奖只授予40岁以前的数学家，但是当时的威尔斯已经45岁了，由于他的贡献太大，所以破例授予他这个数学上的最高奖）。

费马的这个定理，被数学界称为“会下金蛋的鸡”，因为在证明这个定理的数百年中，产生了很多独立的数学分支，使得数学得到了蓬勃发展，这正是：提出一个好的问题，往往比解决它更有价值。因此，费马的这个定理被正式命名为：费马大定理。你见过有几个定理叫“大定理”？很少很少。一个“大”字，足以体现这个定理的分量。

故事讲完了，这里讲了什么道理呢？读者自己体会吧——其实，我什么道理都没讲——我只想借用“费马大定理”的“大”字，把我的这本书命名为：真题“大”全解。因为，这本书，我以为，相对于其他真题书来讲，是最有分量的。

一、真题的重要性不言而喻

从1987年开始，考研数学实行了全国统一考试的形式，考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准。直到今天，几十年下来，考研数学的命题可以说极其成熟了，也逐渐出现了以下两大特点：

第一，考研数学命题的风格稳定：重视基础，淡化技巧，计算量大。考研数学试题是命题组集体智慧的结晶，在确定了上述命题的风格和原则后，考题受到命题组各位成员自身“喜好”的影响很小。所以，做好历年真题，是熟悉考研数学风格的好路子。

第二，考研数学命题的形势特殊：命题时间短，任务重，参考以往考题成为必须。为了确保考研数学命题的安全性，不出现泄漏考题的情况，现在的考研命题时间很短，已经不再像多年前那样宽松

(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了。所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从1987年到今天积累下来的命制过的试题(这里还包括从未考过的备考卷上的试题),以此为基础,"参考""改编"甚至"照搬"这些题。故,读者应该懂得,做好历年真题,是预测考研数学考题的好路子。

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则。

第一,**考研数学试题收录的全面性**。收录从全国统考以来所有的考研数学试题,而不是部分试题,给读者提供一份完整的历史资料。从而,力图给读者提供原汁原味的历年的实考题,是本书坚持的第一个原则。

第二,**考研数学试题解析的权威性**。凡是有当年命题人自己写的答案,忠实其答案;凡是有当年考试中心组织的专家写的答案,参考其答案。总之,本书对真题的答案解析,是最权威、最深刻的,这是本书坚持的第二个原则。

这两个原则,事实上,就是本书分量最重的地方——每一道题的收录,都有根有据;每一道题的解析,都有源有头。

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和解析分册。试卷分册中,我将1987年至2016年的真题试卷完整地展现给读者,供读者检测、演练之用;解析分册中,我们提供给读者全面、深刻、由命题人把关的试题解析。其中,为了不影响考生有针对性地备考,有些较早年份的超纲题目,我做了必要的删除。那么在试卷分册中,被删除题目的套卷中,余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分。当然,考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析,我们在解析分册中给出了权威的解答,依据考试年份与题号可作相应查找。值得注意的是,本书仅为数学二的真题大全解,需考数学二的考生若做完了这本书的题目,想再多做演练,亦可参考数学一与数学三的真题大全解。

对于真题大全解的使用,与习题集的使用有类似之处。我在《张宇考研数学题源探析经典1000题》中已经给读者提出了建议:把题目的演算过程写到草稿纸上去,把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去,总之,不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了,当你下次再做这个题目时,在没有任何提示的情况下,你能保证自己一定会做吗?"干干净净"的真题集,事实上是对读者提出了高标准、严要求,希望读者把真题全部做完一遍后,第二遍就能够查漏补缺、扫清死角。

感谢从命题组中退下来的老专家们,在数学原题的收集、确认与解析中,他们作出了重要贡献。感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑,感谢高等教育出版社的刘佳同志,他们给作者提供了很多便利和帮助。

张宇

2016年5月 于北京

目录

CONTENTS

第一部分

高等数学

第 1 章　函数、极限、连续

考点分布

考点 \ 分值 \ 年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
复合函数	4	5		3		3					3				3	
极限的定义及性质			3	3	3		8				5	3	3	3	3	
两个基本极限	3		7	5		8		3	5	3	3				3	
洛必达法则	6	4			5	6	3	3		3		3	5	3		8
夹逼准则或定积分定义求极限									3							
单调有界准则																8
无穷小的比阶	4										3				3	
连续与间断点		4							3	8		5			4	3

1987—2002 年

考点 \ 分值 \ 年份	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（87—17 年）
复合函数												11				32
极限的定义与性质	4				4		9		10			10			4	75
两个基本极限		10				9			4		4					67
洛必达法则	10			10										10	10	89
夹逼准则或定积分定义求极限														4	10	17
单调有界准则				12		4			10	14	11					59
无穷小的比阶	4		4		4	4	4		4	10	14	4	10	4		76
连续与间断点		4	4		4	4	4	4					4		4	59

2003—2017 年

1.1 函数及其性质

考点点睛

1. 有界性

(1) $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(2) $f(x)$ 在(a,b)上连续,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$,则 $f(x)$ 在(a,b)上有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界,则 $f(x)$ 在 I 上有界.

2. 奇偶性

(1) $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数,则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数.

(2) $f(x)$ 是连续的奇函数,则其所有原函数都是偶函数;

$f(x)$ 是连续的偶函数,则其所有原函数中只有一个是奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 在$(-a,a)$上有定义,则 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

3. 周期性

(1) $f(x)$ 是可导的以 T 为周期的周期函数,则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

(2) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0.$$

(3) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\dfrac{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{T}x$ 以 T 为周期.

4. 单调性

设 $f(x)$在区间 I 上可导,

(1) 任意 $x\in I$,$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调增;

任意 $x\in I$,$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调减.

(2) 任意 $x\in I$,$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减;

任意 $x\in I$,$f'(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调不增.

在用单调性说明方程的根的问题时只能使用(1)中的单调增(减),而不能使用(2)中的单调不减(不增).

1 [1987—Ⅲ] $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是

(A)有界函数. (B)单调函数. (C)周期函数. (D)偶函数.

答 应选(D).

解 由于 $f(-x)=|-x\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$,则 $f(x)$为偶函数.

2 [1987—Ⅲ] 函数 $f(x)=x\sin x$

(A)当 $x\to\infty$时为无穷大. (B)在$(-\infty,+\infty)$内有界.

(C)在$(-\infty,+\infty)$内无界. (D)当 $x\to\infty$时有有限极限.

答 应选(C).

解 由于 $f(2k\pi)=2k\pi\sin 2k\pi=0$,$f\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k$ 充分大),则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界,但 $x\to\infty$时,$f(x)$不是无穷大,也没有有限极限. 则应选(C).

注 要正确区分无穷大量与无界变量的区别与联系,无穷大量一定是无界变量,但反之不对;常见的

是无界变量但不是无穷大量的有：$x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$；$x\to\infty$ 时，$x\sin x$.

3 [1988—Ⅲ] 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域为 $\{x|x\leqslant 0\}$.

4 [1990—Ⅲ] 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$______.

答 应填1.

解 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 知，对一切的 x，$|f(x)|\leqslant 1$，则 $f[f(x)]=1$.

注 函数的复合是一种重要的运算，求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数 $y=f[g(x)]$，实际上就是将 $u=g(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中，关键是搞清楚 $u=g(x)$ 的函数值落在 $y=f(u)$ 定义域的哪一部分.

5 [1992—Ⅲ] 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2 & x\geqslant 0.\end{cases}$

答 应选(D).

解 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2-x, & -x>0,\end{cases}$ 即 $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

6 [1993—Ⅲ] 当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A)无穷小.

(B)无穷大.

(C)有界的，但不是无穷小.

(D)无界的，但不是无穷大.

答 应选(D).

解 取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，$f(x_n)=(n\pi)^2\sin n\pi=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$；

取 $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$f(y_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty$.

则当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是无界的，但不是无穷大.

注 本题同上面的第2题，都是在考查无穷大量、无界变量及有界变量等几个基本概念.

7 [1997] 设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

答 应选(D).

解 根据 $g(x)$ 的定义知，复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

而 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$;$x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant 0$. 故

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

8 [1999] 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则

(A)当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必是偶函数.

(B)当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必是奇函数.

(C)当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必是周期函数.

(D)当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必是单调增函数.

答 应选(A).

解 直接法. 据"1.1 考点点睛"中的"2. 奇偶性"可知(A)正确.

排除法. (B)的反例:$f(x)=\cos x$,$F(x)=\sin x+1$ 不是奇函数;

(C)的反例:$f(x)=\cos^2 x$,$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$,不论 C 取什么常数,$F(x)$都不是周期函数;

(D)的反例:$f(x)=-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内是单调增加的,但 $F(x)=-\ln x$ 在$(0,+\infty)$内是单调减少的.

注 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,考查

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+C.$$

若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-u)=-f(u)$,有 $F(-x)=F(x)$(对任意的 C);

若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(-u)=f(u)$,进而当且仅当 $C=0$ 时,有 $F(-x)=-F(x)$.

9 [2001] 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$则 $f\{f[f(x)]\}=$

(A)0. (B)1. (C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ (D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

答 应选(B).

解 由于 $f(x)\leqslant 1$,故 $f[f(x)]=1$,因而

$$f\{f[f(x)]\}=1.$$

10 [2005] 设 $F(x)$是连续函数 $f(x)$的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A)$F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$是奇函数.

(B)$F(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$是偶函数.

(C)$F(x)$是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$是周期函数.

(D)$F(x)$是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$是单调函数.

答 应选(A).

解 本题同上面的第 8 题,都是在考查原函数的奇偶性与周期性等性质,根据对第 8 题的分析,便可直接选(A).

1.2 极限的定义及性质

11 [1998] 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$,则下列断言正确的是

(A)若$\{x_n\}$发散,则$\{y_n\}$必发散. (B)若$\{x_n\}$无界,则$\{y_n\}$必有界.

(C)若$\{x_n\}$有界,则$\{y_n\}$必为无穷小. (D)若$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$为无穷小,则$\{y_n\}$必为无穷小.

答 应选(D).

解　直接法. 由于 $y_n=\frac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，选(D).

排除法. 取 $x_n=n,y_n=0,n=1,2,\cdots$，排除(A)；

取 $x_n=\begin{cases}2k-1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}k=1,2,\cdots;y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 2k, & n=2k,\end{cases}k=1,2,\cdots$，排除(B)；

取 $x_n=\begin{cases}1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}k=1,2,\cdots;y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 1, & n=2k,\end{cases}k=1,2,\cdots$，排除(C).

12 [1999]　“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A)充分条件但非必要条件.　　　(B)必要条件但非充分条件.

(C)充分必要条件.　　　(D)既非充分条件又非必要条件.

答　应选(C).

解　本题考查考生对数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义的理解. 其定义是“对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，总存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$”. 两种说法相比较，似乎定义中的条件更强些，即由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 必能推出“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”. 但其逆也是正确的. 因为对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，取 $\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3},\frac{1}{3}\right\}$，则对此 ε，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$，现取 $N_1=N-1$，于是当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$. 所以以上两种说法是等价的，即选项(C)是正确的.

注　本题主要考查数列极限的“$\varepsilon-N$”语言.

13 [2003]　设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　　(D)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

答　应选(D).

解　假设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=A$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_nc_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=A$ 存在，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

注　由极限的局部保号性容易得到极限的局部保序性：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，且 $A>B$，则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $a_n>b_n$.

对于本题，选项(A)，(B)说对任意的 n 成立，显然错了；

对于选项(C)$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是典型的“$0\cdot\infty$”型未定式，其极限可能存在也可能不存在.

14 [2017]　设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　　　(B)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(C)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　　　(D)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

答　应选(D).

解法 1　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n=\sin a=0,$$

$\sin a=0$ 有无穷多个解，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=a+\sqrt{|a|}=0\Rightarrow a=0\text{ 或 }a=-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=a+a^2=0\Rightarrow a=0\text{ 或 }a=-1.$$

于是(A)，(B)，(C)被排除. 因此选(D).

解法 2　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=a+\sin a=0,$$

因 $x+\sin x$ 是单调递增的，故只有唯一零点即 $x=0$，因此 $a=0$. 选(D).

1.3 求函数的极限

考点点睛

求函数极限首先是化简，其次是判别类型选择方法.

常用的化简方法有：(1)非零常数因子先求出；(2)有理化；(3)通分；(4)倒代换.

常用的方法有：(1)四则运算法则及基本极限；(2)等价代换；(3)洛必达法则；(4)泰勒公式.

1. 常用的等价代换

$x\to 0$, $\sin x\sim \arcsin x\sim \tan x\sim \arctan x\sim \ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$;

$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$, $a^x-1\sim x\ln a$, $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$;

$x-\sin x\sim \dfrac{1}{6}x^3$, $x-\arcsin x\sim -\dfrac{1}{6}x^3$;

$x-\tan x\sim -\dfrac{1}{3}x^3$, $x-\arctan x\sim \dfrac{1}{3}x^3$;

$x-\ln(1+x)\sim \dfrac{1}{2}x^2$.

2. 几个重要函数的泰勒展开式

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$;

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$;

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$;

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$;

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$.

3. 极限值与无穷小的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\alpha=0$.

1.3.1 需要分别求左右极限的情形

求分段函数在分段点处的极限，含绝对值函数、取整函数在相应点的极限，“e^{∞}”及“$\arctan\infty$”型的极限往往需要分别考查左右极限，$e^{+\infty}=+\infty$，$e^{-\infty}=0$，$\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$，$\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$.

15 [1992—Ⅲ] 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A)等于 2.　　(B)等于 0.　　(C)为∞.　　(D)不存在但不为∞.

答 应选(D).

解 由于

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

而

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

则极限$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在，但不是$\infty$.

1.3.2 七种未定式的极限

基本类型是“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型. 其余的“$0\cdot\infty$”，“$\infty-\infty$”，“∞^0”，“0^0”，“1^∞”五种未定式都可以转化为“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型，对“∞^0”，“0^0”，“1^∞”的 $\lim u^v$ 形式往往都是先改写为 $e^{\lim v\ln u}$ 再去处理，特别地对“1^∞”型极限：$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}=e^{\lim v(u-1)}$.

16 [1987—Ⅲ] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=$________.

答 应填 e^{-3}.

解 这是“1^∞”型，直接有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=e^{\lim n\left(\frac{n-2}{n+1}-1\right)}=e^{\lim\frac{-3n}{n+1}}=e^{-3}$.

17 [1987—Ⅲ] 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$.

18 [1988—Ⅲ] $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________.

答 应填 1.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^A$，而

$$A=\lim_{x\to0^+}\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}x\ln x=0,$$

故 $e^0=1$.

注 最后一步的极限$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$是使用洛必达法则计算，即$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0$，这是一个重要极限，在后来考题中多次出现.

19 [1989—Ⅲ] $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=$________.

答 应填$\frac{1}{2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\cos 2x\cdot\frac{x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$.

20 [1989—Ⅲ] 求$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解 这是“1^∞”型，直接有$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}(2\sin x+\cos x-1)\right\}$，

而
$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=2,$$

故$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^2$.

21 [1991—Ⅲ] $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$________.

答 应填-1.

解 由于$\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$,则$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=-1$.

22 [1991—Ⅲ] 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

解 因当$x\to0$时,$e^x-1\sim x,x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$,原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

23 [1992—Ⅲ] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$________.

答 应填0.

解 当$x\to0$时,$1-\sqrt{1-x^2}\sim\dfrac{1}{2}x^2$,原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=0$.

24 [1992—Ⅲ] 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

解 这是"1^∞"型,直接有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=e^{\lim\frac{x-1}{2}\left(\frac{3+x}{6+x}-1\right)}=e^{\lim\frac{-3x+3}{2x+12}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

25 [1993—Ⅲ] $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$________.

答 应填0.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0$.

26 [1993—Ⅲ] 求$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解 作一个负倒代换$t=-\dfrac{1}{x}$,$t\to0^+$,则

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{t^2}+100}-\frac{1}{t}}{-t}=-\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+100t^2}-1}{t^2}=-\lim_{t\to0^+}\frac{50t^2}{t^2}=-50.$$

注 (1)本题是$x\to-\infty$且含有偶次开方号,所以作一个负倒代换$t=-\dfrac{1}{x}$,$t\to0^+$转化为正的去处理就不容易出错了;

(2)最后一步利用了等价代换:$x\to0$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

27 [1994—Ⅲ] 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

解 这是"1^∞"型,直接有$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)\right]^n=e^{\lim n\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)-1\right]}=e^A$,

而
$$A=\lim_{n\to\infty}n\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{2}{n}}$$
$$=2(\tan x)'\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2\sec^2\frac{\pi}{4}=4,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)\right]^n=e^4.$$

注 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}$时,当然也可以转化为函数极限利用洛必达法则,但不如上面直接凑导数

的定义方便.

28 [1995—Ⅲ] 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解 原极限$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

29 [1996—Ⅲ] $\lim\limits_{x\to\infty}x\left\{\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]-\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\right\}=$________.

答 应填 2.

解法 1 由于$x\to\infty$时,$\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]\sim\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\sim\dfrac{3}{x}$,则

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{3}{x}=3.$$

同理可得$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=1$. 原式$=3-1=2$.

解法 2

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}x\left\{\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]-\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\right\}\\
=&\lim_{x\to\infty}x\left\{\cos\xi\cdot\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\right\}\\
=&\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2}{x}=2,\end{aligned}$$

其中第一个等号是对$f(x)=\sin x$使用了拉格朗日中值定理,此时ξ介于$\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$与$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$之间,当$x\to\infty$时,容易看出$\xi\to0$,于是$\cos\xi\to1$.

30 [1997] 求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解 作负代换$t=-x$,$t\to+\infty$,则

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}}=1.$$

注 题目中是$x\to-\infty$且含有偶次开方号,此时作一个负代换转化为正的去处理是比较方便的.

31 [1998] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

答 应填$-\dfrac{1}{4}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$.

32 [1999] 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{-x}{1+x}}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

33 [2000] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$________.

答 应填 $-\dfrac{1}{6}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{2x^3}=-\frac{1}{6}.$$

34 [2001] $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

答 应填 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1-x)}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{\sqrt{2}(x+2)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

35 [2002] 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解,则当 $x\to0$ 时,函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A)不存在. (B)等于 1. (C)等于 2. (D)等于 3.

答 应选(C).

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{y'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{y''(x)}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}(y''+py'+qy)=\lim\limits_{x\to0}e^{3x}=1$,且 $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}y'=0$,所以 $\lim\limits_{x\to0}y''=1$.

从而
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=2.$$

即(C)是正确的.

注 本题也可以先求出 $y''(0)=1$,于是有 $y(x)\sim\dfrac{1}{2}y''(0)x^2=\dfrac{1}{2}x^2(x\to0)$,则
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$$

36 [2004] 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{2+\cos x}{3}-1\right)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2+\cos x}{3}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

37 [2007] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

答 应填 $-\dfrac{1}{6}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x+x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}.$$

注 也可以直接使用洛必达法则,但不如上面凑差函数直接等价代换方便.

38 [2008]　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解法 1　$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

解法 2　$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{(\sin x)^3}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

解法 3　由$x\to 0$时，$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，知$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$，于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left[\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)\right]}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

解法 4　由于$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3(x\to 0)$，则$\sin x-\sin(\sin x)\sim\frac{1}{6}\sin^3 x(x\to 0)$，于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^4 x}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

39 [2009]　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

解法 1　$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-2\sec^2 x\tan x}{4}=\frac{1}{4}.$$

解法 2　$$原极限=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x+\tan x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}$$
$$=0+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{2x^2}=\frac{1}{4}.$$

注　遇到当$x\to 0$时，分子含$\sin x$，$\arcsin x$，$\tan x$，$\arctan x$，分母对应为x^3或者分子含$\ln(1+x)$，分母对应是x^2时都可以采用解法2这种加减项拆开凑常见差函数的等价方法进行求解.

40 [2011]　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

答　应填$\sqrt{2}$.

解　这是“1^∞”型，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+2^x}{2}-1\right)}$，而
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+2^x}{2}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{2x}=\ln\sqrt{2},$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

41 [2013] $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$________.

答　应填$\sqrt{\mathrm{e}}$.

解　这是"1^∞"型,$\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

42 [2014] 设函数$f(x)=\arctan x$.若$f(x)=xf'(\xi)$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$

(A)1.　　(B)$\dfrac{2}{3}$.　　(C)$\dfrac{1}{2}$.　　(D)$\dfrac{1}{3}$.

答　应选(D).

解　因为$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,且$f(x)=xf'(\xi)$,所以可知$f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\arctan x}{x}$,从而$\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$.又当$x\to 0$时,$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

43 [2016] 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}\right\}$,

且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x}\cdot\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}\\&=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

1.3.3　含有变限积分函数的极限

含有变限积分函数的极限往往可以首先通过洛必达法则去掉积分符号(变限积分函数求导),转化为一般类型的未定式,再去求解.

44 [2003] 设$a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$等于

(A)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.　　(C)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$.

答　应选(B).

解　$$a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}(1+x^n)$$

$$=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\},$$

故

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}=(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1.$$

选项(B)正确.

45 [2005]　设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

解法 1　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$

$$\xlongequal{\text{令 } x-t=u}\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$\xlongequal[(\xi\text{在 }0\text{ 和 }x\text{ 之间})]{\text{积分中值定理}}\lim_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

解法 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}\right]$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}+f(x)}$$

$$=1-\frac{\lim\limits_{x\to 0}f(x)}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}+\lim\limits_{x\to 0}f(x)}$$

$$=1-\frac{f(0)}{\lim\limits_{x\to 0}f(x)+f(0)}=1-\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

注　本题是一道很好的考查变限积分函数的极限问题，解法 1 是使用了积分中值定理，解法 2 是使用了四则运算法则.

46 [2009]　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,\mathrm{d}x=$ ________.

答　应填 0.

解　令

$$I_n=\int e^{-x}\sin nx\,\mathrm{d}x=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nx\,\mathrm{d}x=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n,$$

所以

$$I_n=-\frac{(\sin nx+n\cos nx)e^{-x}}{n^2+1}+C,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(n\cos nx+\sin nx)e^{-x}}{n^2+1}\Big|_0^1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(n\cos n+\sin n)e^{-1}}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}\right]=0.$$

注　(1) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ 是典型的循环积分(两次分部积分后再次出现本身).

(2) 本题实际上有着更一般的结论：

若 $f(x)$ 在$[0,1]$上有一阶连续导数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin nx\,dx=0$. 可用夹逼准则去推导，留给读者自练.

47 [2011]　已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}$. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，试求 α 的取值范围.

解　因为

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}}=\frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

由题意 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，得 $\alpha>1$.

又因为

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to0^+}x^{3-\alpha},$$

由题意 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，得 $\alpha<3$.

综上所述，$1<\alpha<3$.

48 [2014]　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

解　$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$

$$\xlongequal{令 u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}.$$

49 [2017]　求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

解　令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，$dt=-du$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

1.3.4 含有抽象函数的极限

处理这种极限往往可以有三种基本方法：一是利用基本的恒等变形，把待求极限与已知极限联系起来，二是对其中的已知函数使用泰勒展开，三是利用“1.3 考点点睛”中的“3. 极限值与无穷小的关系”表达出抽象函数，再去求解。

50 [2000]　若$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$为

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D)∞.

答　应选(C).

解法 1　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}$

$$=-\frac{1}{6}\times6^3+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$$

故选(C).

解法 2　对 $\sin x$ 使用泰勒展开，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\frac{1}{6}(6x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36=0,$$

故$\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$. 故选(C).

解法 3　利用“1.3 考点点睛”中的“3. 极限值与无穷小的关系”.

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，得$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$，于是得 $xf(x)=-\sin 6x+o(x^3)$，

故$\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x+\alpha}{x^3}=36$. 故选(C).

1.3.5 已知极限反求参数

这类问题本质上仍然是求极限，往往是在求极限的过程中结合相关条件（如洛必达法则的条件）及利用以下两个常用结论逐步求出有关参数.

1. $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A,\lim g(x)=0$，则$\lim f(x)=0$.

2. $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq0,\lim f(x)=0$，则$\lim g(x)=0$.

51 [1990—Ⅲ]　已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则

(A)$a=1,b=1$.　　(B)$a=-1,b=1$.　　(C)$a=1,b=-1$.　　(D)$a=-1,b=-1$.

答　应选(C).

解　由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$ 知，

$$1-a=0,a+b=0,$$

则 $a=1,b=-1$.

52 [1990—Ⅲ]　已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

解　这是“1^∞”型，直接有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{\lim x\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)}=e^{\lim\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=9$，则 $a=\ln 3$.

53 [1994—Ⅲ]　设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则

(A)$a=1,b=-\frac{5}{2}$.　　(B)$a=0,b=-2$.　　(C)$a=0,b=-\frac{5}{2}$.　　(D)$a=1,b=-2$.

答　应选(A).

解法 1
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x},$$
由上式右端可知 $a=1$,否则原式极限为无穷.

则
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1-2bx}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-[1+2b(1+2x)]}{2}=-\frac{1+2b}{2}=2,$$
得 $b=-\frac{5}{2}$.

解法 2　由泰勒公式可知 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

又
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}-ax-bx^2+o(x^2)}{x^2}=2,$$
则
$$a=1,-\frac{1}{2}-b=2,b=-\frac{5}{2}.$$

注　直接在分子中加一个 x,减一个 x,凑出 $\ln(1+x)-x$,然后拆开处理也是很简单的.

54 [1998]　确定常数 a,b,c 的值,使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq0)$.

解　由于 $x\to0$ 时,$ax-\sin x\to0$ 且
$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\neq0.$$
故 $b=0$. 再用洛必达法则:
$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2}.$$
若 $a\neq1$,则上式为 ∞,与条件不符,故 $a=1$,从而再用洛必达法则(或等价无穷小代换),得 $c=\frac{1}{2}$.

注　(1) 可以断定 $b=0$ 的理由要清楚,实际上由 1.3.5 中介绍的两个常用结论,得到
$$\lim_{x\to0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0,$$
无论 $b>0$,还是 $b<0$,都有 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$,这与积分 $\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$ 矛盾,故必有 $b=0$.

(2) 要认真体会这里可以使用洛必达法则的原因.

1.4　求数列的极限

1.4.1　利用夹逼准则、定积分定义求极限

55 [1995－Ⅱ]　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$______.

答　应填 $\frac{1}{2}$.

解　$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$,

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$
由夹逼准则可知:原极限$=\frac{1}{2}$.

56 [2002]　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)=$______.

答　应填$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

解
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.\end{aligned}$$

57 [2004]　$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$等于

(A)$\int_1^2\ln^2x\,dx$.　　(B)$2\int_1^2\ln x\,dx$.　　(C)$2\int_1^2\ln(1+x)dx$.　　(D)$\int_1^2\ln^2(1+x)dx$.

答　应选(B).

解
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\\&=2\int_1^2\ln x\,dx.\end{aligned}$$

58 [2010]　(Ⅰ)比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$与$\int_0^1 t^n|\ln t|dt\ (n=1,2,\cdots)$的大小,说明理由;

(Ⅱ)记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解　(Ⅰ)当$0\leqslant t\leqslant1$时,因为$0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$,所以
$$0\leqslant|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|,$$
因此
$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|dt.$$
(Ⅱ)由(Ⅰ)知
$$0\leqslant u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|dt.$$
因为
$$\int_0^1 t^n|\ln t|dt=-\int_0^1 t^n\ln t\,dt=-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2},$$
所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n|\ln t|dt=0$. 故由夹逼准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

注　(1) 本题第一问用到基本不等式:$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,x\in(0,+\infty)$.

(2) 第二问实际上是有着更一般的结论:若$f(x)$在$[0,1]$上连续,则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$(读者可用夹逼准则简单验证),于是由于$\lim\limits_{t\to0^+}t|\ln t|=0$,记$f(t)=t|\ln t|,0<t\leqslant1$,则可补充定义$f(0)=0$,这样$f(t)=t|\ln t|$在$0\leqslant t\leqslant1$上便是连续的,根据上面的结论便有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^{n-1}\cdot t|\ln t|dt=0$,再由夹逼准则知,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\ln t|\ [\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t = 0.$$

59 [2012] $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$______.

答 应填$\dfrac{\pi}{4}$.

解
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{1+n^2}+\frac{n^2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

60 [2016] 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$______.

答 应填 $\sin 1-\cos 1$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot i\sin\frac{i}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n}\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\sin 1-\cos 1.$$

61 [2017] 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{4}.$$

1.4.2 利用单调有界准则求极限

62 [1999] 设 $f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ $(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

证 由题设可得
$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)(k=1,2,\cdots),$$
因此
$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0,$$
即数列$\{a_n\}$有下界. 又
$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调减少，故由单调有界数列必有极限的准则知数列$\{a_n\}$的极限存在.

63 [2002] 设$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

证 由题设$0<x_1<3$知，x_1，$3-x_1$均为正数，故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设当$k>1$时，$0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

故由数学归纳法知，对任意正整数$n>1$，均有$0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$，即数列$\{x_n\}$是有界的.

又当$n>1$时，

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})\\&=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0\left(因\ x_n\leqslant\frac{3}{2}\right),\end{aligned}$$

故当$n>1$时，$x_{n+1}\geqslant x_n$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

所以由单调有界数列极限存在的准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)},$$

得

$$a=\sqrt{a(3-a)},$$

解之得$a=\frac{3}{2}$，$a=0$(舍去)，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

64 [2006] 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限；

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(Ⅰ)**证** 用归纳法证明$\{x_n\}$单调减少且有下界.

由$0<x_1<\pi$，得

$$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi.$$

设$0<x_n<\pi$，则

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi,$$

所以$\{x_n\}$单调减少且有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

记$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，由$x_{n+1}=\sin x_n$，得$a=\sin a$，所以$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(Ⅱ)**解** 因为

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{2x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{-x\sin x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}},$$

又因(Ⅰ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

注 (1)本题用到基本不等式$\sin x<x<\tan x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)第二问中不能对数列直接使用洛必达法则，需要转化为函数形式才可以使用洛必达法则进行求导.

65 [2008] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B)若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛. (D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

答 应选(B).

解 在选项(B)中，因为数列 $\{x_n\}$ 单调，考虑到 $f(x)$ 是单调有界函数，所以数列 $\{f(x_n)\}$ 不仅单调，而且有界，从而收敛.

66 [2011] (Ⅰ)证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立；

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(Ⅰ)**证法 1** 令 $f(x)=\ln x\,(x>0)$. 对任意正整数 n，根据拉格朗日中值定理，得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n=\frac{1}{\xi},$$

其中 $n<\xi<n+1$，所以

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

证法 2 令 $F(x)=x-\ln(1+x)\,(x>0)$，则

$$F'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0\,(x>0),$$

即当 $x>0$ 时，$F(x)$ 单调增加. 又 $F(0)=0$，所以 $F(x)>0\,(x>0)$，从而

$$F\left(\frac{1}{n}\right)>0，即\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

再令 $G(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\,(x>0)$，则

$$G'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0\,(x>0),$$

即 $G(x)\,(x>0)$ 单调增加. 又 $G(0)=0$，所以 $G(x)>0\,(x>0)$，从而

$$G\left(\frac{1}{n}\right)>0，即\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

综上可知，有

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

证法 3 令 $F(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,(x>0)$，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.

又
$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x+1)}<0\,(x>0),$$

即 $F(x)\,(x>0)$ 单调减少，所以 $F(x)>0\,(x>0)$，故

$$F(n)>0，即\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

再令 $G(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\,(x>0)$，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$.

又
$$G'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(1+x)^2}<0\,(x>0),$$

即 $G(x)\,(x>0)$ 单调减少，所以 $G(x)>0\,(x>0)$，故

$$G(n)>0，即\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

综上可知，有

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

证法 4 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，且

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x,$$

所以

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(Ⅱ)证 由(Ⅰ)知，当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln(1+n)-\ln n>0,\end{aligned}$$

故数列$\{a_n\}$单调减少且有下界，所以$\{a_n\}$收敛.

注 (1)本题第一问就是典型的考查不等式的证明，我们给出四种不同的解答，都是证明不等式的常用方法，其中证法 2 和证法 3 是利用单调性，也是后面证明不等式最常用的一种方法，证法 1 是利用中值定理，对中值 ξ 放缩，证法 4 可能有些同学不熟悉这种改写，但这也不失是一种经典的方法.

(2)这道考题就是在上面的 1999 年的考题中取 $f(x)=\frac{1}{x}$ 构造出来的.

67 [2012] 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的

(A)充分必要条件. (B)充分非必要条件.

(C)必要非充分条件. (D)既非充分也非必要条件.

答 应选(B).

解 因为 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，所以数列$\{S_n\}$是单调增加的.

如果$\{S_n\}$有界，根据单调有界准则，知$\{S_n\}$的极限存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 由此可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0,$$

即数列$\{a_n\}$收敛. 可知数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的充分条件.

但是，若$\{a_n\}$收敛，$\{S_n\}$却未必有界. 例如，取 $a_n=1(n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$收敛，但 $S_n=n$ 无上界. 可见$\{S_n\}$有界并非是$\{a_n\}$收敛的必要条件，故应选(B).

68 [2012] (Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 x_n，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

证 (Ⅰ)令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$，则 $f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续，且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0,$$

$$f(1)=n-1>0,$$

故由闭区间上连续函数的零点定理知，$f(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内至少有一个零点，即方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内至少有一个实根.

又

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>1>0,x\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内单调增加,可知 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内只有一个零点,从而方程 $f(x)=0$,即 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根.

(Ⅱ)由于 $x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,所以数列 $\{x_n\}$ 有界. 又

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,$$
$$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}=1,$$

而 $x_{n+1}^{n+1}>0$,所以

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n>x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1},$$

即

$$(x_n-x_{n+1})[1+(x_n+x_{n+1})+\cdots+(x_n^{n-1}+x_n^{n-2}x_{n+1}+\cdots+x_{n+1}^{n-1})]>0,$$

显然方括号内各项均为正,于是有

$$x_n>x_{n+1},n=2,3,\cdots,$$

即 $\{x_n\}$ 单调减少.

由以上讨论知,数列 $\{x_n\}$ 单调有界,故 $\{x_n\}$ 收敛,设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,\text{即}\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1,$$

令 $n\to\infty$,并注意到 $\frac{1}{2}<x_n<x_2<1$,则有 $\frac{a}{1-a}=1$,解得 $a=\frac{1}{2}$,

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

注　本题是一道综合题,考查方程的根的存在性及个数、数列的单调有界准则.

69 [2013]　设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

(Ⅰ)解　由 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$,得 $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$,解得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x=1$.

又 $f''(1)=\left.\frac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0$,故 $f(1)=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极小值,也即最小值.

(Ⅱ)证　由(Ⅰ)的结果知 $\ln x+\frac{1}{x}\geqslant1$,从而有

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\leqslant\ln x_n+\frac{1}{x_n},$$

于是 $x_n<x_{n+1}$,即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

又由 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$,知 $\ln x_n<1$,得 $x_n<\mathrm{e}$,从而数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,可知 $a\geqslant x_1>0$. 在不等式 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$ 两边取极限,得 $\ln a+\frac{1}{a}\leqslant1$. 又 $\ln a+\frac{1}{a}\geqslant1$,故 $\ln a+\frac{1}{a}=1$,可得 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

1.5　无穷小的比阶

两个无穷小的比阶本质上就是“$\frac{0}{0}$”型极限的问题，故常用的方法就是求“$\frac{0}{0}$”型极限的方法：等价代换、洛必达法则、泰勒公式。

(1) 若 $x\to 0$，$f(x)\sim ax^k$，则 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小量。

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=c\neq 0$，则 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小量。

(3) 若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+\cdots$.

$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0$，且 $a_n\neq 0$，则 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小量。

(4) 若 $f(x)=x^m+x^n$，$m<n$，则 $f(x)\sim x^m$，$x\to 0$，即当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小量。

70 [1992—Ⅲ]　当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的

(A)低阶无穷小.　　(B)高阶无穷小.

(C)等价无穷小.　　(D)同阶但非等价无穷小.

答　应选(B).

解法 1　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$，则当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小.

解法 2　由于 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，故选(B).

71 [1996—Ⅲ]　设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则

(A)$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$.　　(B)$a=1$，$b=1$.　　(C)$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-1$.　　(D)$a=-1$，$b=1$.

答　应选(A).

解法 1　由泰勒公式可知

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2).$$

由题设可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+(1-b)x+o(x^2)}{x^2}=0.$$

则 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$.

解法 2　由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}.$$

若 $b\neq 1$，上式右端趋于无穷，从而左端也趋于无穷，与原题设矛盾，所以 $b=1$.

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}-a=\frac{1}{2}-a=0,$$

$a=\dfrac{1}{2}$，所以应选(A).

72 [1997]　设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

答 应选(C).

解 当$x\to 0$时,

$$e^{\tan x}-e^{x}=e^{x}(e^{\tan x-x}-1)\sim e^{x}(\tan x-x)\sim \tan x-x,$$

而

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以

$$\tan x-x=\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

因此选(C).

注 可以仿照解答来验证:当$x\to x_0$时,若$f(x)\to 0,g(x)\to 0$,则$e^{f(x)}-e^{g(x)}\sim f(x)-g(x)$.

73 [1999] 设$\alpha(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt,\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,则当$x\to 0$时,$\alpha(x)$是$\beta(x)$的

(A)高阶无穷小. (B)低阶无穷小.

(C)同阶但不等价的无穷小. (D)等价无穷小.

答 应选(C).

解 先利用洛必达法则求出$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$,再根据此极限值进行判定.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}=5\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}\\&=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{-\frac{1}{\sin x}}\\&=\frac{5}{e}\neq 1,\end{aligned}$$

故$\alpha(x)$是$\beta(x)$同阶但不等价的无穷小量.

注 利用了洛必达法则求导定阶.

74 [2001] 设当$x\to 0$时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小,而$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小,则正整数n等于

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

答 应选(B).

解 这是无穷小比阶的题. 把题中的每个无穷小都用其等价无穷小代替,便可得到正确的答案. 事实上,当$x\to 0$时,

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4,x\sin x^n\sim x^{n+1},e^{x^2}-1\sim x^2,$$

故应选(B).

75 [2002] 设函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内具有二阶连续导数,且$f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0,f''(0)\neq 0$. 证明:存在唯一的一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当$h\to 0$时,$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小.

证法1 因为当$h\to 0$时,$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小,故其本身也是无穷小,即

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}[\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)]\\&=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0),\end{aligned}$$

而$f(0)\neq 0$,所以得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1=0.$$

又

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}[\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)]$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0),$$

因为 $f''(0)\neq 0$，故得

$$\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0,$$

其中还包含

$$0=\lim_{h\to 0}[\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)]=(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0),$$

因为 $f'(0)\neq 0$，得

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0.$$

总之，得 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

因其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故由克拉默法则知，存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

证法 2　利用泰勒公式.

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)=\lambda_1\left[f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+o(h^2)\right]+$$

$$\lambda_2[f(0)+2f'(0)h+2f''(0)h^2+o(h^2)]+\lambda_3\left[f(0)+3f'(0)h+\frac{9}{2}f''(0)h^2+o(h^2)\right]-f(0)$$

$$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h+\frac{(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)}{2}f''(0)h^2+o(h^2)$$

$$=o(h^2).$$

故 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$ 的系数行列式(范德蒙德行列式)不为 0(为 2)，根据克拉默法则，可知方程组有唯一解，即存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足条件.

注　条件可以减弱为"$f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶导数"，此时解法 1 的洛必达法则便不能再使用，但解法 2 的泰勒公式仍然成立.

76 [2003]　若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$________.

答　应填 -4.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}a=1,a=-4.$

77 [2004]　把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小量，则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　　(B) α,γ,β.　　(C) β,α,γ.　　(D) β,γ,α.

答　应选(B).

解法1 因
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^x\cos t^2\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\cos x^2}=0,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}{\int_0^x\cos t^2\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}\cos x^2}=0,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=0,$$
所以γ是较α高阶的无穷小量,β是较γ高阶的无穷小量,即选项(B)正确.

解法2 当$x\to0^+$时,$\alpha'=\cos x^2\to1$(0阶),$\beta'=\tan x\cdot2x\sim2x^2$(2阶),$\gamma'=\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2}x$(1阶).则$\alpha,\beta,\gamma$阶数由低到高的次序是$\alpha,\gamma,\beta$,选(B).

78 [2005] 当$x\to0$时,$\alpha(x)=kx^2$与$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$是等价无穷小量,则$k=$________.

答 应填$\frac{3}{4}$.

解
$$1=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})kx^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{kx}+\frac{1-\cos x}{kx^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}\right),$$
故$k=\frac{3}{4}$.

79 [2006] 试确定常数A,B,C的值,使得$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中$o(x^3)$是当$x\to0$时比$x^3$高阶的无穷小量.

解 因为
$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$
将其代入题设等式,整理得
$$1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3)=1+Ax+o(x^3),$$
故有
$$\begin{cases}1+B=A,\\ \frac{1}{2}+B+C=0,\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0,\end{cases}$$
解得
$$A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}.$$

注 本题也可以使用洛必达法则完成,但较之用泰勒公式要麻烦许多,有兴趣的同学可以试一下.

80 [2007] 当$x\to0^+$时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$. (B)$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$. (C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D)$1-\cos\sqrt{x}$.

答 应选(B).

解　排除法. 当 $x\to0^+$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x$，不选(A)，(C)，(D)，所以选(B).

81 [2009]　当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

(A)$a=1,b=-\frac{1}{6}$.　(B)$a=1,b=\frac{1}{6}$.　(C)$a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　(D)$a=-1,b=\frac{1}{6}$.

答　应选(A).

解　根据泰勒公式，得

$$f(x)=x-\sin ax=x-\left[ax-\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)\right]$$
$$=(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3-o(x^3),$$
$$g(x)=x^2\ln(1-bx)=x^2[(-bx)+o(x)]$$
$$=-bx^3+o(x^3).$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小量，所以 $\begin{cases}1-a=0,\\ \frac{1}{6}a^3=-b,\end{cases}$ 即 $a=1,b=-\frac{1}{6}$.

82 [2011]　已知当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则

(A)$k=1,c=4$.　(B)$k=1,c=-4$.　(C)$k=3,c=4$.　(D)$k=3,c=-4$.

答　应选(C).

解　根据泰勒公式，有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)(x\to0),$$

$$\sin 3x=3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)(x\to0),$$

所以

$$f(x)=3\sin x-\sin 3x=4x^3+o(x^3)\sim4x^3(x\to0),$$

于是 $c=4,k=3$，因此选(C).

83 [2012]　已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)若当 $x\to0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量，求常数 k 的值.

解　(Ⅰ)由题意得

$$a=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x-\sin x}{x^2}\right)$$
$$=1+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=1.$$

(Ⅱ)因为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),x\sin x=x^2+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k-2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-x^2+o(x^3)}{x^{k-2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^{k+2}},$$

可知当 $3=k+2$ 时,$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量,因此 $k=1$.

84 [2013] 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是

(A)比 x 高阶的无穷小量.　　(B)比 x 低阶的无穷小量.

(C)与 x 同阶但不等价的无穷小量.　　(D)与 x 等价的无穷小量.

答 应选(C).

解 因为 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

即有

$$\lim_{x\to 0}\sin\alpha(x)=0.$$

注意到 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$,可知 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$,即 $\alpha(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=-\frac{1}{2},$$

即 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小量,选项(C)正确.

85 [2013] 当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值.

解法 1 由题设知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=1.$$

上式左边是"$\frac{0}{0}$"型未定式的极限,应用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2\cos x\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x+3\cos x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x}{anx^{n-1}}.$$

由于当 $n=2$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{anx^{n-1}}=\frac{1}{2a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x}{anx^{n-1}}=\frac{2}{a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x}{anx^{n-1}}=\frac{9}{2a},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\frac{1+4+9}{2a}=\frac{7}{a}=1,$$

故 $a=7$.

当 $n\neq 2$ 时,显然不合题意,所以 $n=2,a=7$.

解法 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{ax^n}+\frac{\cos x\cdot(1-\cos 2x)}{ax^n}+\frac{\cos x\cdot\cos 2x\cdot(1-\cos 3x)}{ax^n}\right].$$

由于当 $n=2$ 时,

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{ax^2}=\frac{1}{2a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos 2x)}{ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x)^2}{ax^2}=\frac{2}{a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\cos 2x\cdot(1-\cos 3x)}{ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(3x)^2}{ax^2}=\frac{9}{2a},$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\frac{1+4+9}{2a}=\frac{7}{a}.$$

由题意知$\frac{7}{a}=1$,所以$a=7$.

当$n\neq2$时,不合题意,故$n=2,a=7$.

解法 3 由泰勒公式知

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3),\cos 2x=1-\frac{4}{2}x^2+o(x^3),\cos 3x=1-\frac{9}{2}x^2+o(x^3),$$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right]\left[1-\frac{4}{2}x^2+o(x^3)\right]\left[1-\frac{9}{2}x^2+o(x^3)\right]}{ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{7x^2+o(x^3)}{ax^n},$$

可见,当$n=2$时此极限为$\frac{7}{a}$.

又因为$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$是等价无穷小量,故有$\frac{7}{a}=1$,即$a=7$.

当$n\neq2$时,不合题意,所以$n=2,a=7$.

86 [2014] 当$x\to0^+$时,若$\ln^{\alpha}(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$均是比$x$高阶的无穷小量,则$\alpha$的取值范围是

(A)$(2,+\infty)$. (B)$(1,2)$. (C)$\left(\frac{1}{2},1\right)$. (D)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

答 应选(B).

解 当$x\to0^+$时,$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim2^{\alpha}x^{\alpha}$是$x$的$\alpha$阶无穷小,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}x^{\frac{2}{\alpha}}$是$x$的$\frac{2}{\alpha}$阶无穷小.

由题意可知$\alpha>1,\frac{2}{\alpha}>1$. 所以$\alpha$的取值范围是$(1,2)$,应选(B).

87 [2015] 设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,g(x)=kx^3$.若$f(x)$与$g(x)$在$x\to0$时是等价无穷小,求$a,b,k$的值.

解 利用泰勒公式.

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=x+a\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]+bx\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]$$
$$=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3).$$

当$x\to0$时,$f(x)\sim kx^3$,则$a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$.

88 [2016] 设$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$,$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$,$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当$x\to0^+$时,以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. (B)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$. (C)$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$. (D)$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

答 应选(B).

解 当 $x\to0^+$ 时,$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim\sqrt{x}\sqrt[3]{x}=x^{\frac{5}{6}},$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x.$$

则从低阶到高阶排序是 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$,故选(B).

1.6 连续与间断点

考点点睛

1. 连续的两种定义

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\text{或}\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

2. 连续函数的运算性质

(1)两个连续函数的和、差、积、商(分母不为0)所得的函数仍是连续函数.

(2)连续函数复合连续函数所得的函数仍是连续函数.

(3)基本初等函数在其定义域内连续.

(4)初等函数在其定义区间内连续.

3. 间断点的判定

(1)找函数的间断点往往是找函数区间内部的无定义点,若是分段函数还应该考虑分段点.

(2)判定是什么类型的间断点是通过求该点的极限来确定的,特别应注意常出现的"e^{∞}","arctan ∞"型要分左右极限.

89 [1988-Ⅲ] 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant0,\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $a=$________.

答 应填1.

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$. 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,只需 $a=1=f(0)$,即 $a=1$.

90 [1989-Ⅲ] 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是________.

答 应填 $a=b$.

解 由于

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{x}=b,f(0^-)=\lim_{x\to0^-}(a+bx^2)=a,f(0)=a.$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则应有 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$,即 $a=b$.

91 [1990-Ⅲ] 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f'(0)\neq0$,$f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(A)连续点.

(B)第一类间断点.

(C)第二类间断点.

(D)连续点或间断点不能由此确定.

答　应选(B).

解　由于 $f(0)=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)\neq0.$$

而 $F(0)=f(0)=0$，则极限 $\lim\limits_{x\to0}F(x)$ 存在但不等于 $F(0)$，故 $x=0$ 为 $F(x)$ 的第一类间断点.

92 [1993—Ⅲ]　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$

(A)不连续.　　(B)连续，但不可导.

(C)可导，但导数不连续.　　(D)可导，且导数连续.

答　应选(A).

解

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}(x+1)=-2,$$

即 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

93 [1994—Ⅲ]　若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

答　应填 -2.

解　由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=2+2a$，又 $f(0)=a$. 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，只要 $2+2a=a$，即 $a=-2$.

94 [1995—Ⅲ]　设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

答　应选(D).

解法1　反证法. 设 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 处处连续，则 $\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$，从而 $\varphi(x)$ 处处连续，与原题设矛盾.

解法2　排除法. 举反例 $f(x)\equiv1$，$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $\varphi[f(x)]\equiv1$，处处连续，不选(A)；$[\varphi(x)]^2\equiv1$，处处连续，不选(B)；$f[\varphi(x)]\equiv1$，处处连续，不选(C). 则应选(D).

注　对于连续函数的复合运算，只有连续函数复合连续函数是连续函数，其余的各种复合都是没有结论的，需要具体考查，于是(A)，(C)直接排除.

95 [1995—Ⅲ]　设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$，故

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

96 [1997]　已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

答 应填 $e^{-\frac{1}{2}}$.

解 根据函数在某点处连续的定义知，$a=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{x^{-2}}$，问题转化为求极限，即

$$a=\lim_{x\to0}(\cos x)^{x^{-2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{\tan x}{2x}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

97 [1998] 求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

解 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点为 $\dfrac{1}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 不存在的点，即 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ 四点.

在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=+\infty$；在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}}f(x)=+\infty$，故 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$；在 $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$，但相应的函数值在该处无定义，故这两处为 $f(x)$ 的可去间断点.

98 [2000] 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足

(A) $a<0,b<0$.　　(B) $a>0,b>0$.　　(C) $a\leqslant0,b>0$.　　(D) $a\geqslant0,b<0$.

答 应选(D).

解 由题目所给的条件便可分别确定系数. 因函数 $f(x)$ 在整个数轴上连续，故有 $a\geqslant0$；又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则必有当 $x\to-\infty$ 时，$a+e^{bx}\to\infty$，所以 $b<0$. 故(D)是正确的.

99 [2001] 求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解 因

$$f(x)=\exp\left\{\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}\right\},$$

而由洛必达法则得

$$\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}=\lim_{t\to x}x\cdot\frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\cos t}=\frac{x}{\sin x},$$

故 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$. 由此表达式知 $x=0$ 及 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的间断点.

由于

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e,$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；而 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 均为无穷间断点.

100 [2002] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

答 应填 -2.

解

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}ae^{2x}=a.$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，得 $a=-2$.

101 [2003] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$ 问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值

时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

解

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\lim_{x\to0^-}\sqrt{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{6ax}{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=-6a.$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2\lim_{x\to0^+}(a^2e^{ax}+2)=2a^2+4.$$

令 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，有 $-6a=2a^2+4$，得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

102 [2004] 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$________.

答 应填0.

解 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq0,\end{cases}$ 故 $x=0$ 是间断点.

注 在 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$ 的运算中，n 是极限变量，x 是参变量(视为常数).

103 [2005] 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则

(A) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

答 应选(D).

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$，故 $x=0$ 是第二类间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1$，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$，故 $x=1$ 是第一类间断点.

104 [2006] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x\sin t^2\,dt, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

答 应填 $\dfrac{1}{3}$.

解

$$a=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\sin t^2\,dt=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

105 [2007] 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$

(A)0. (B)1. (C)$-\frac{\pi}{2}$. (D)$\frac{\pi}{2}$.

答 应选(A).

解 由函数的表达式知,$x=0,x=1,x=\pm\frac{\pi}{2}$是间断点,不难看出,$x=1,x=\pm\frac{\pi}{2}$是无穷间断点,故只能选(A).事实上,由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1+e^{1-\frac{1}{x}}}{1-e^{1-\frac{1}{x}}}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=-1,$$

因此 $x=0$ 是跳跃间断点,即第一类间断点.

106 [2008] 设函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$有

(A)1 个可去间断点,1 个跳跃间断点. (B)1 个可去间断点,1 个无穷间断点.
(C)2 个跳跃间断点. (D)2 个无穷间断点.

答 应选(A).

解 $x=0,x=1$ 是间断点.因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x\cos x}=0,$$

故 $x=0$ 是可去间断点;而

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x}=\sin 1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-x}=-\sin 1,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\sin 1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=\sin 1,$$

故 $x=1$ 是跳跃间断点.

注 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim\limits_{x\to0}x\ln|x|=0$,这个极限$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ 还记得吗?

107 [2008] 已知函数 $f(x)$连续,且$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$________.

答 应填 2.

解 因为函数 $f(x)$连续,故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.由题设

$$1=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2f^2(x)}{x^2f(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}f(0).$$

故 $f(0)=2$.

108 [2009] 函数 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin \pi x}$的可去间断点的个数为

(A)1. (B)2. (C)3. (D)无穷多个.

答 应选(C).

解 对 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin \pi x}$,当 x 取任何整数时,$f(x)$均无意义,故 $f(x)$的间断点有无穷多个.但可去间断点为极限存在的点,故应在 $x-x^3=0$ 的解 $x=0,\pm1$ 中去寻找.由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi},$$

因此可去间断点有 3 个，即 $x=0,\pm1$. 应选(C).

109 [2010] 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

答 应选(B).

解 $f(x)$在 $x=0,1,-1$ 处无定义，所以 $f(x)$有 3 个间断点. 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=-1,\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2},\lim_{x\to-1}f(x)=-\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\infty,$$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$的跳跃间断点，$x=1$ 是 $f(x)$的可去间断点，$x=-1$ 是 $f(x)$的无穷间断点.

110 [2015] 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内

(A)连续. (B)有可去间断点. (C)有跳跃间断点. (D)有无穷间断点.

答 应选(B).

解 这是“1^∞”型极限，直接有 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2}{t}\left(1+\frac{\sin t}{x}-1\right)}=e^{x\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}}=e^x\ (x\neq0)$，$f(x)$在 $x=0$处无定义，且$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$，故 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点，选(B).

111 [2017] 若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续. 则

(A)$ab=\frac{1}{2}$. (B)$ab=-\frac{1}{2}$.

(C)$ab=0$. (D)$ab=2$.

答 应选(A).

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\frac{1}{2a}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}b=b$.

要使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，则

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0),$$

即$\frac{1}{2a}=b$，从而有 $ab=\frac{1}{2}$. 故应选(A).

第 2 章　一元函数微分学

考点分布

考点＼分值＼年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
导数定义	3	4	6	3	3		3	8	8	3		3	3	7	3	10
复合函数求导	7	8	4	6	3		8		6	3	3			5		
隐函数求导		5	3	5		5	3	5	5		5		3	3	3	
参数方程求导	7		4	3	5	3		3	3	5			3			6
函数极值与最值		16	11	9	12	3	9	7		8	3	3	3	3		
渐近线与凹凸性		4	6	5	6			8	8			3	5	3	3	
不等式的证明				9	9		9					8				8
方程的根(零点问题)			3				3	9		3	8					
微分中值定理	10					9			14	16			8	6	3	3

1987—2002 年

考点＼分值＼年份	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计(87—17 年)
导数定义		14	4		4			4	4		4	4	4	4		113
复合函数求导	4		4	4	4			4		4			4			81
隐函数求导	4			4		4	4	4		4				4		73
参数方程求导			4		4	10	4				4	8	4		4	84
函数极值与最值	4	4					4	10	4			10			10	133
渐近线与凹凸性		4	4	4	4			4	11	8		4	4	8	4	110

续表

考点＼分值＼年份	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（87－17年）
不等式的证明		12		10						10		4		4		83
方程的根（零点问题）	12					4	4						11		10	67
微分中值定理			12	4	15	4	11	10			10	4	10			149

2003—2017年

2.1　导数与微分的定义及应用

考点点睛

导数的定义是一个非常重要的概念，要熟悉各种形式下的等价表示，要看得出谁是增量，是哪一点的增量．关于导数的定义主要有三类问题：(1) 利用导数的定义求极限；(2) 利用导数的定义求导数；(3) 利用导数的定义判定可导性．

1 [1987—Ⅲ]　设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于

(A) $f'(a)$.　　(B) $2f'(a)$.　　(C) 0.　　(D) $f'(2a)$.

答　应选(B).

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a-x)-f(a)}{-x}=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$.

2 [1988—Ⅲ]　若函数 $y=f(x)$，有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小.　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

答　应选(B).

解　因为

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x,\ \lim_{\Delta x\to0}\frac{\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2},$$

则当 $\Delta x\to0$ 时，$\mathrm{d}y$ 与 Δx 是同阶无穷小.

3 [1989—Ⅲ]　设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$________.

答　应填 $n!$.

解法1　由导数定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x}=n!.$$

解法2　$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)=xg(x)$，$g(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(x)=g(x)+xg'(x)$，于是 $f'(0)=g(0)=n!$.

4 [1989—Ⅲ]　设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

答　应选(D).

解　由于$h\to+\infty$时$\dfrac{1}{h}\to 0^+$，则$\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在只能得出$f(x)$在$a$点的右导数存在，不能得出$a$点导数存在.(B)，(C)明显不对，这两个选项中的极限存在不能推导出$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$存在，故不能作为$f(x)$在$x=a$点可导的充分条件.

又
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a),$$
则应选(D).

注　对(B)选项切勿这样处理：
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)-[f(a+h)-f(a)]}{h}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2f'(a)-f'(a)=f'(a).$$

因为这里不符合极限四则运算法则($\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$和$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$都未必存在)，对(C)选项同理.

5　[1994—Ⅲ]　设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$则$f(x)$在$x=1$处的

(A)左、右导数都存在.　　(B)左导数存在，但右导数不存在.

(C)左导数不存在，但右导数存在.　　(D)左、右导数都不存在.

答　应选(B).

解　$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$，但$f(1)=\dfrac{2}{3}$，则$f(x)$在$x=1$处不右连续，从而$f'_+(1)$不存在. 又$\dfrac{2}{3}x^3$在点$x=1$处可导，而$x\leqslant 1$时$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3$，则$f'_-(1)$存在，故应选(B).

6　[1995—Ⅲ]　设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$. 若$F(x)$在$x=0$处可导，则必有

(A) $f(0)=0$.　　(B) $f'(0)=0$.　　(C) $f(0)+f'(0)=0$.　　(D) $f(0)-f'(0)=0$.

答　应选(A).

解法1　由于$F(x)=f(x)+f(x)|\sin x|$，而$f(x)$可导，则$F(x)$在$x=0$可导等价于$f(x)|\sin x|$在$x=0$处可导，令$\varphi(x)=f(x)|\sin x|$，
$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0),$$
$$\varphi'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)\sin x}{x}=-f(0),$$
则要使$F(x)$在$x=0$处可导，当且仅当$f(0)=-f(0)$，即$f(0)=0$.

解法2　本题和下面的第8题都是在考查“可导函数与连续但不可导函数的乘积的可导性问题”，实际上有如下的结论(利用导数的定义即可简单验证，留给读者完成)：

设$f(x)$在$x=x_0$处可导，$g(x)$在$x=x_0$处连续但不可导，则$F(x)=f(x)\cdot g(x)$在$x=x_0$处可导当且仅当$f(x_0)=0$. 于是本题直接选(A).

7　[1996—Ⅲ]　设函数$f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义，若当$x\in(-\delta,\delta)$时，恒有$|f(x)|\leqslant x^2$，则$x=0$必是$f(x)$的

(A)间断点.　　(B)连续而不可导的点.

(C)可导的点，且$f'(0)=0$.　　(D)可导的点，且$f'(0)\neq 0$.

答　应选(C).

解法 1　由当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|\leqslant x^2$ 知，$f(0)=0$.

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{x^2}{|x|}=|x|\to0(x\to0).$$

由夹逼准则可知
$$\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=0,$$

从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，即 $f'(0)=0$. 故应选(C).

解法 2　取 $f(x)=x^3$，显然 $f(x)$ 满足原题条件. 但 $f(x)=x^3$ 在点 $x=0$ 处连续且可导，$f'(0)=0$，则(A)，(B)，(D)均不正确，故应选(C).

注　解法 1 中用到一个常用结论：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$.

8 [1998]　函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

答　应选(C).

解法 1　当函数中出现绝对值符号时，就有可能出现不可导的"尖点"，因为这时的函数是分段函数.

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-x-2)x(1-x^2), & x<-1,\\(x^2-x-2)x(x^2-1), & -1\leqslant x<0,\\(x^2-x-2)x(1-x^2), & 0\leqslant x<1,\\(x^2-x-2)x(x^2-1), & x\geqslant1.\end{cases}$$

又

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x+1}=0,\ \lim_{x\to-1^+}\frac{(x^2-x-2)x(x^2-1)-0}{x+1}=0,$$

即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-x-2)x(x^2-1)-0}{x}=2,\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x}=-2,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

类似地，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处亦不可导. 由于函数 $f(x)$ 在其他点处均可导，故 $f(x)$ 只有 2 个不可导点，即(C)项正确.

解法 2　根据第 6 题解法 2 中的结论，有

$$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|=(x^2-x-2)|x|\cdot|x-1|\cdot|x+1|,$$

且　$$(x^2-x-2)\Big|_{x=0}=-2\neq0,(x^2-x-2)\Big|_{x=1}=-2\neq0,(x^2-x-2)\Big|_{x=-1}=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 处都不可导，在 $x=-1$ 处可导. 选(B).

9 [1999]　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\x^2g(x), & x\leqslant0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A)极限不存在.　　(B)极限存在，但不连续.

(C)连续，但不可导.　　(D)可导.

答　应选(D).

解
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}g(x)x=0.$$

第二个等式利用了 $g(x)$ 是有界函数这一条件(有界函数×无穷小量=无穷小量). 由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左导数等于右导数，因而，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

10 [2002] 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$

(A) -1. (B) 0.1. (C) 1. (D) 0.5.

答 应选(D).

解 因为
$$dy=f'(x^2)d(x^2)=2xf'(x^2)dx,$$
所以得
$$0.1=-2f'(1)\cdot(-0.1),$$
即 $f'(1)=0.5$. 所以(D)是正确的.

11 [2004] 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$. (D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$.

答 应选(C).

解 因为
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0,$$
所以由函数极限的局部保号性，存在 $\delta>0$，在区间 $(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 内 $\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$. 故对于任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)-f(0)>0$，即 $f(x)>f(0)$. 选项(C)正确. 同时也就看出选项(D)是错的：当 $x\in(-\delta,0)$ 时，应有 $f(x)-f(0)<0$，即 $f(x)<f(0)$.

不少考生选(A)，其错误在于以函数在一点处的导数符号来确定函数在一个区间上的单调性. 例如
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$
满足题设条件且 $f'(0)=\frac{1}{2}>0$，当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. 显然，当 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ 时，$f'(x_n)=-\frac{1}{2}$，即在任何 $(0,\delta)$ 内都有点 x_n 使 $f'(x_n)<0$，函数不可能单调增加，即(A)错. 类似地，选项(B)也是错的.

注 (1)本题若是加强条件为“设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有一阶连续导数，…”，则此时(A)便是正确的. 这是因为对连续函数而言，一点大于0，可以保证附近的点的函数值都是大于0，于是在这种情形下，存在 $\delta>0$，对 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，有 $f'(x)>0$.

(2)单纯的一点导数大于0，不能推出函数的单调性，但一点的导数大于0，有一个基本不等式需要知道：$f'(x_0)>0\Rightarrow$ 存在 $\delta>0$，对 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有 $f(x)>f(x_0)$；对 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，有 $f(x)<f(x_0)$. 当 $f'(x_0)<0$ 有着与上面相反的结论.(仿照本题用函数极限的局部保号性容易验证，在此省去)

12 [2004] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(Ⅰ)写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

(Ⅱ)问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解 (Ⅰ)当 $-2\leqslant x<0$，即 $0\leqslant x+2<2$ 时，
$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4).$$
(Ⅱ)由题设知 $f(0)=0$.
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-4)}{x-0}=-4,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$
令 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $k=-\frac{1}{2}$，即当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

13 [2005] 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)处处可导. (B)恰有一个不可导点.

(C)恰有两个不可导点. (D)至少有三个不可导点.

答 应选(C).

解 当$|x|<1$时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$;

当$|x|>1$时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{3n}+1}=|x|^3$;

当$|x|=1$时,$f(x)=1$.

故
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$$

由$y=f(x)$的图形容易看到,$x=1$,$x=-1$是不可导点.事实上,因

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x^2+x+1)=3,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,$$

故$x=1$是函数的不可导点.同理$x=-1$也是函数的不可导点.

注 若能想到重要极限"$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_i\},i=1,2,\cdots,m;a_i>0$",则本题便可更简单:$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+|x^3|^n}=\max\{1,|x^3|\}$,从图形上容易直接看出有两个不可导点.

14 [2006] 设函数$y=f(x)$具有二阶导数,且$f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx为自变量x在点x_0处的增量,Δy与dy分别为$f(x)$在点x_0处对应的增量与微分,若$\Delta x>0$,则

(A)$0<dy<\Delta y$. (B)$0<\Delta y<dy$.

(C)$\Delta y<dy<0$. (D)$dy<\Delta y<0$.

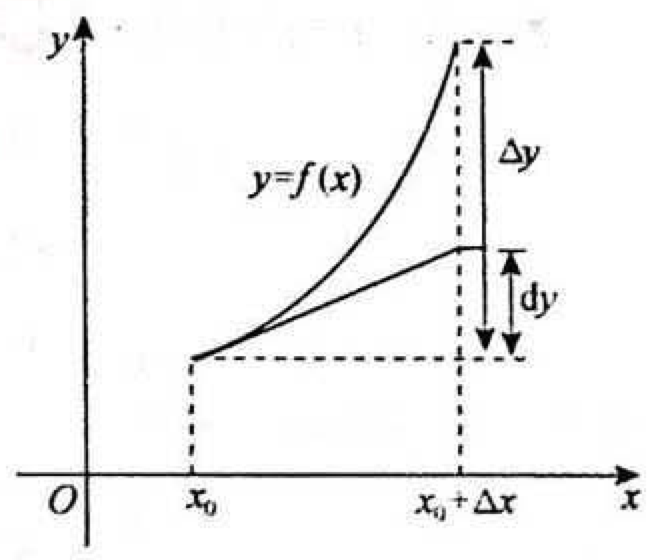


图 1—2—1

答 应选(A).

解法1 由条件知,$y=f(x)$单调上升且是凹的,于是根据Δy,dy的几何意义,如图1—2—1所示,可直接得到$0<dy<\Delta y$,选(A).

解法2 由凹曲线的性质,得$f(x_0+\Delta x)>f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,\Delta x\neq0$,于是$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>f'(x_0)\Delta x>0(\Delta x>0)$即$\Delta y>dy>0$,选(A).

15 [2007] 设函数$f(x)$在$x=0$处连续,下列命题错误的是

(A)若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$存在,则$f(0)=0$. (B)若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在,则$f(0)=0$.

(C)若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$存在,则$f'(0)$存在. (D)若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则$f'(0)$存在.

答 应选(D).

解 由$f(x)$在$x=0$处连续,要讨论$f(0)$的值,自然想到利用$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.对于(A),由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$存在,于是

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right]=0,$$

所以选项(A)正确.

对于(B),将$f(x)+f(-x)$看成(A)中的$f(x)$,于是$\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]=0$,即有

$$f(0)+f(-0)=0,$$

故$f(0)=0$,选项(B)正确.

对于(C),由(A)已知$f(0)=0$,按导数定义,有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x},$$

由(C)的条件知 $f'(0)$存在,故选项(C)亦正确.

于是余下只有(D)不正确,选(D).可以举例说明(D)不正确,例如设 $f(x)=|x|$,满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$(存在),但 $f'(0)$不存在.

16[2011] 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A)$-2f'(0)$. (B)$-f'(0)$. (C)$f'(0)$. (D)0.

答 应选(B).

解 根据导数定义:$f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$,有

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{x}-2\frac{f(x^3)}{x^3}\right]=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-2\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3-0}$$
$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0),$$

因此选(B).

注 可以取一个具体的 $f(x)$,如 $f(x)=x$,则(A),(C),(D)都被排除.

17[2012] 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B)$(-1)^n(n-1)!$. (C)$(-1)^{n-1}n!$. (D)$(-1)^n n!$.

答 应选(A).

解法1 利用导数的定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to0}[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

解法2 记 $g(x)=(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,则 $f(x)=(e^x-1)g(x)$,于是 $f'(x)=e^xg(x)+(e^x-1)g'(x)$,则 $f'(0)=g(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$,选(A).

2.2 求各类函数的导数与微分

2.2.1 复合函数

18[1987-Ⅲ] 设 $y=\ln(1+ax)$,其中 a 为非零常数,则 $y'=$________,$y''=$________.

答 应填$\dfrac{a}{1+ax}$;$-\dfrac{a^2}{(1+ax)^2}$.

解 由 $y=\ln(1+ax)$知,$y'=\dfrac{a}{1+ax}$,$y''=-\dfrac{a^2}{(1+ax)^2}$.

19[1988-Ⅲ] 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$________.

答 应填$(1+2t)e^{2t}$.

解 由于 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{2t}=te^{2t}$,则 $f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=(1+2t)e^{2t}$.

20[1989-Ⅲ] 已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$,求 y'.

解
$$y'=\frac{(e^{-\sqrt{x}})'}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}=\frac{e^{-\sqrt{x}}\cdot(-\sqrt{x})'}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x(1-e^{-2\sqrt{x}})}}.$$

21[1990-Ⅲ] 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}$,则 $y'=$________.

答 应填$-\dfrac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\sec^2\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

解 由复合函数求导法则知 $y'=e^{\tan\frac{1}{x}}\sec^2\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\sec^2\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right).$$

22[1991—Ⅲ] 设 $y=\ln(1+3^{-x})$，则 $dy=$________.

答 应填 $-\frac{\ln 3}{3^x+1}dx$.

解
$$dy=y'dx=\frac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}dx=-\frac{\ln 3}{1+3^x}dx.$$

23[1993—Ⅲ] 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解
$$\frac{dy}{dx}=2xf'(x^2)\cos[f(x^2)],$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}.$$

24[1995—Ⅲ] 设 $y=\cos x^2\sin^2\frac{1}{x}$，则 $y'=$________.

答 应填 $-2x\sin x^2\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos x^2$.

解 由 $y=\cos x^2\sin^2\frac{1}{x}$ 知，

$$y'=-2x\sin x^2\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cos x^2=-2x\sin x^2\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos x^2.$$

25[1996—Ⅲ] 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'\big|_{x=0}=$________.

答 应填 $\frac{1}{3}$.

解
$$y'=\frac{2}{3}(x+e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right),y'\Big|_{x=0}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}.$$

26[1997] 设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''\big|_{x=0}=$________.

答 应填 $-\frac{3}{2}$.

解
$$y=\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),y'=-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{x}{1+x^2},$$
$$y''=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},y''\Big|_{x=0}=-\frac{3}{2}.$$

27[2005] 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\big|_{x=\pi}=$________.

答 应填 $-\pi dx$.

解
$$y'=[e^{x\ln(1+\sin x)}]'=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right],$$

则 $y'\big|_{x=\pi}=-\pi$，故 $dy\big|_{x=\pi}=-\pi dx$.

28[2006] 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3-1$.　(B) $-\ln 3-1$.　(C) $-\ln 2-1$.　(D) $\ln 2-1$.

答 应选(C).

解
$$h'(x)=e^{1+g(x)}\cdot g'(x).$$

因 $h'(1)=1$，$g'(1)=2$，故

$$g(1)=\ln\frac{h'(1)}{g'(1)}-1=\ln\frac{1}{2}-1=-\ln 2-1.$$

2.2.2 隐函数

29 [1988—Ⅲ] 已知 $y=1+xe^{xy}$，求 $y'\big|_{x=0}$ 及 $y''\big|_{x=0}$.

解
$$y'=e^{xy}(x^2y'+xy+1),$$
$$y''=e^{xy}(x^2y''+2xy'+xy'+y)+e^{xy}(x^2y'+xy+1)(xy'+y).$$

因 $x=0$ 时 $y=1$，所以
$$y'\big|_{x=0}=e^0=1,y''\big|_{x=0}=e^0+e^0=2.$$

30 [1989—Ⅲ] 设 $\tan y=x+y$，则 $dy=$________.

答 应填 $\cot^2 y dx$.

解 等式 $\tan y=x+y$ 两边求微分得 $\sec^2 y dy=dx+dy$，则 $dy=\dfrac{1}{\sec^2 y-1}dx=\cot^2 y dx$.

31 [1990—Ⅲ] 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy.

解 对方程两边求微分，
$$2dy-dx=(dx-dy)\ln(x-y)+(x-y)\frac{dx-dy}{x-y},$$

结合题中所给方程，可得
$$dy=\frac{x}{2x-y}dx.$$

32 [1992—Ⅲ] 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$ 的值.

解 方程两边对 x 求导得
$$y'-e^y-xe^yy'=0,$$

上式两边再对 x 求导得
$$y''-e^yy'-(e^yy'+xe^yy'^2+xe^yy'')=0.$$

由题设知 $x=0$ 时 $y=1$，代入上面两式解得 $y'(0)=e,y''(0)=2e^2$，

即
$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=2e^2.$$

33 [1993—Ⅲ] 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

答 应填 $\dfrac{y^2-2x\cos(x^2+y^2)-e^x}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$.

解 等式 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 两边对 x 求导得
$$2\cos(x^2+y^2)\cdot(x+yy')+e^x-y^2-2xyy'=0,$$

则
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2x\cos(x^2+y^2)-e^x}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}.$$

34 [1994—Ⅲ] 设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $y'=(1+y')f'$，故 $y'=\dfrac{f'}{1-f'}$，$y''=(1+y')^2f''+y''f'$，

所以
$$y''=\frac{(1+y')^2f''}{1-f'}=\frac{f''}{(1-f')^3}.$$

35 [1995—Ⅲ] 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq1$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 方程两边取对数，得 $\ln x+f(y)=y$，从而求得
$$y'=\frac{1}{x[1-f'(y)]},y''=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

36 [1999] 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$________.

答　应填1.

解　两边同时对 x 求导，

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x.$$

由原方程知，$x=0$ 时，$y=1$，代入上式，得 $y'\Big|_{x=0}=1$.

37 [2000]　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=$________.

答　应填 $(\ln 2-1)\mathrm{d}x$.

解　等式两边同时求微分得

$$2^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)\ln 2=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$

由原方程知，当 $x=0$ 时，$y=1$，并代入上式得

$$\ln 2\mathrm{d}x-\mathrm{d}x=\mathrm{d}y,$$

即

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=(\ln 2-1)\mathrm{d}x.$$

也可先求出 $y'\Big|_{x=0}$(原方程两边对 x 求导).

38 [2006]　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$________.

答　应填 $-e$.

解　将 $x=0$ 代入方程 $y=1-xe^y$ 可得 $y=1$. 等式两端对 x 求导得

$$y'=-e^y-xe^yy',$$

将 $x=0,y=1$ 代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=y'\Big|_{x=0}=-e.$$

39 [2007]　已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定. 设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$，$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

解　在 $y-xe^{y-1}=1$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$.

在 $y-xe^{y-1}=1$ 两边对 x 求导，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-e^{y-1}-xe^{y-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{e^{y-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1-xe^{y-1})-e^{y-1}\left(-e^{y-1}-xe^{y-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{(1-xe^{y-1})^2},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=2.$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right),$$

故

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0.$$

又

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\left[\frac{y''}{y}-\frac{(y')^2}{y^2}+\sin x\right],$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=f'(0)(2-1)=1.$$

40 [2009]　设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$________.

答　应填 -3.

解　当 $x=0$ 时，由原方程得 $y(0)=0$. 在方程 $xy+e^y=x+1$ 两边对 x 求导得

$$y+xy'+e^yy'=1, \qquad ①$$

代入 $x=0,y(0)=0$，便有 $y'(0)=1$.

在①式两边再次对 x 求导,得

$$2y'+xy''+e^y y''+e^y(y')^2=0,$$

代入 $x=0,y(0)=0,y'(0)=1$,得 $y''(0)=-3$.

41[2012] 设 $y=y(x)$是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数,则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$______.

答 应填1.

解 将 $x=0$代入 $x^2-y+1=e^y$,可得到 $\left.y\right|_{x=0}=0$.

在 $x^2-y+1=e^y$ 两边对 x 求导,得

$$2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}, \tag{①}$$

将 $x=0,y=0$代入上式,可得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$.

在①式两边再对 x 求导,得

$$2-\frac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2},$$

将 $x=0,y=0,\dfrac{dy}{dx}=0$代入上式,则可解得$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1$.

42[2013] 设函数 $y=f(x)$由方程 $\cos xy+\ln y-x=1$ 确定,则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$

(A)2. (B)1. (C)-1. (D)-2.

答 应选(A).

解 由方程 $\cos xy+\ln y-x=1$,可解出 $\left.y\right|_{x=0}=f(0)=1$.

在方程两端对 x 求导,有

$$-\sin xy\cdot(y+xy')+\frac{1}{y}\cdot y'-1=0,$$

将 $x=0$及 $\left.y\right|_{x=0}=1$代入上式,得 $\left.y'\right|_{x=0}=f'(0)=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(0+\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2=2f'(0)=2,$$

故选(A).

2.2.3 反函数

43[2003 局部] 设函数 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数,且 $y'\neq0$,$x=x(y)$是 $y=y(x)$的反函数.

(Ⅰ)试将 $x=x(y)$所满足的微分方程$\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$满足的微分方程.

解 (Ⅰ) $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'},\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}.$$

代入原方程,得 $$y''-y=\sin x.$$

44[2013] 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$,则 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$在 $y=0$处的导数$\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$______.

答 应填$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$.

解 由题设 $y=f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，可得 $x\Big|_{y=0}=-1$.

根据反函数求导法则，有

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}\Big|_{x=-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$$

2.2.4 参数方程

45[1987—Ⅲ] 设 $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 因 $\frac{dy}{dt}=5\sin t,\frac{dx}{dt}=5-5\cos t$，故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\sin t}{5(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{5(1-\cos t)^2}.$$

46[1989—Ⅲ] 已知 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 因为 $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2},\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1}{2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

47[1991—Ⅲ] 设 $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}.$$

48[1992—Ⅲ] 设 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$ 其中 f 可导，且 $f'(0)\neq0$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=$________.

答 应填 3.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{f'(e^{3t}-1)\cdot 3e^{3t}}{f'(t)},\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{3f'(0)}{f'(0)}=3.$$

49[1994—Ⅲ] 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$________.

答 应填 $\frac{1}{t}(6t+5)(t+1)$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2,\frac{d^2y}{dx^2}=(6t+5)\frac{1}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{1}{t}(6t+5)(t+1).$$

50[1996—Ⅲ] 设 $\begin{cases}x=\int_0^t f(u^2)\,du,\\ y=[f(t^2)]^2,\end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f(u)\neq0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 因为 $\frac{dx}{dt}=f(t^2),\frac{dy}{dt}=4tf(t^2)f'(t^2)$，所以

$$\frac{dy}{dx}=4tf'(t^2),\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}.$$

51[1997] 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2},$$

由
$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y^2-2ty\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^t=0,\text{得}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{y^2-\mathrm{e}^t}{2(1-ty)},$$
因而
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(y^2-\mathrm{e}^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$$

52 [2003] 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+2t^2,\\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u\end{cases}(t>1)$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$.

解 由
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2\mathrm{e}t}{1+2\ln t},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t,$$
得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{2\mathrm{e}t}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{\mathrm{e}}{2(1+2\ln t)},$$
所以
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}}{2}\cdot\frac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{4t}=-\frac{\mathrm{e}}{4t^2(1+2\ln t)^2}.$$

当 $x=9$ 时，由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$，故
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}=\left.-\frac{\mathrm{e}}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=-\frac{\mathrm{e}}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

53 [2008] 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\mathrm{d}u\end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2t\mathrm{e}^{-x}=0,\\ x\big|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2t\mathrm{e}^{-x}=0$ 得 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，积分并由条件 $x\big|_{t=0}=0$，得 $\mathrm{e}^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$.
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2),$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1].$$

54 [2015] 设 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=3t+t^3,\end{cases}$ 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$______.

答 应填 48.

解 由参数式求导法
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2,$$
再由复合函数求导法则得
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[3(1+t^2)^2]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[3(1+t^2)^2]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=6(1+t^2)\cdot 2t\cdot\frac{1}{x_t'}=12t(1+t^2)^2,\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=48.$$

55 [2017] 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^t,\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$______.

答 应填 $-\frac{1}{8}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\cos t}{1+e^t},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\sin t\cdot(1+e^t)-e^t\cos t}{(1+e^t)^2}\cdot\dfrac{1}{1+e^t}$,

则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

2.2.5 分段函数

56 [1996—Ⅲ] 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1)写出 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式;

(2)$g(x)$是否有间断点、不可导点?若有,指出这些点.

解 (1)$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$

(2)$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处连续,没有间断点.利用导数的定义容易验证,$g(x)$的不可导点是$x=0$及$x=-1$.

57 [1997] 设函数 $f(x)$连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

分析 通过变换将 $\varphi(x)$化为积分上限函数的形式,此时 $x\neq 0$.但根据$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 知 $f(0)=0$,从而$\varphi(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$,由此,利用积分上限函数的求导法则、导数在一点处的定义以及函数连续的定义来判定$\varphi'(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

解 由题设,知 $f(0)=0,\varphi(0)=0$. 令 $u=xt$, 得

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}(x\neq 0),$$

从而

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\ (x\neq 0).$$

由导数定义有

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0),$$

从而知 $\varphi'(x)$在 $x=0$ 处连续.

注 本题是一道综合性试题,主要涉及变限积分函数求导、分段函数求导及连续性的判定(极限值等于函数值),不少考生不能正确表达出 $\varphi(x)$的表达式,尤其是 $\varphi(0)=0$ 没有看出来,导致求导的环节不完整,后面连续性的讨论更是无从谈起.

58 [2015] 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 若 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续,则

(A)$\alpha-\beta>1$.　　　　(B)$0<\alpha-\beta\leqslant 1$.

(C)$\alpha-\beta>2$.　　　　(D)$0<\alpha-\beta\leqslant 2$.

答　应选(A).

解　易求出

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

再有
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}=\begin{cases}0, & \alpha>1,\\ \text{不存在}, & \alpha\leqslant 1,\end{cases}$$
$$f'_-(0)=0.$$

于是,$f'(0)$存在$\Leftrightarrow\alpha>1$,此时$f'(0)=0$.

当$\alpha>1$时,
$$\lim_{x\to0}\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}=0,$$
$$\lim_{x\to0}\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}}=\begin{cases}0, & \alpha-\beta-1>0,\\ \text{不存在}, & \alpha-\beta-1\leqslant 0,\end{cases}$$

因此,$f'(x)$在$x=0$处连续$\Leftrightarrow\alpha-\beta>1$.选(A).

2.2.6　高阶导数

59 [2000]　求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)(n\geqslant3)$.

解法1　由莱布尼茨公式
$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}$$
及
$$[\ln(1+x)]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}(k\text{ 为正整数}),$$
得$n\geqslant3$时,
$$f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}},$$
所以
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}(n\geqslant3).$$

解法2　利用泰勒展开$f(x)=x^2\ln(1+x)=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+2}=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-3}}{n-2}x^n$,

由泰勒展开系数的唯一性,得$\dfrac{(-1)^{n-3}}{n-2}=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$,故$f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-3}}{n-2}n!=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}n!(n\geqslant3)$.

60 [2003]　$y=2^x$的麦克劳林公式中x^n项的系数是________.

答　应填$\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$.

解法1　$(2^x)^{(n)}\Big|_{x=0}=2^x(\ln 2)^n\Big|_{x=0}=(\ln 2)^n$,于是所求系数为$\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$.

解法2　利用泰勒展开$y=2^x=e^{x\ln 2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\ln^n2}{n!}x^n$,故$a_n=\dfrac{\ln^n2}{n!}$.

61 [2007]　设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$,则$y^{(n)}(0)=$________.

答　应填$\dfrac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}$.

解法1
$$y'(x)=\frac{(-1)\times2}{(2x+3)^2},y''(x)=\frac{(-1)\times(-2)\times2^2}{(2x+3)^3},\cdots,$$
$$y^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n2^nn!}{(2x+3)^{n+1}},y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n2^nn!}{(2x+3)^{n+1}}\bigg|_{x=0}=\frac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}.$$

解法 2　利用泰勒展开 $y=\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}x^n$，由泰勒展开系数的唯一性，得 $y^{(n)}(0)=(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}n!$.

62 [2010]　函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.

答　应填 $-2^n(n-1)!$.

解法 1　由于

$$y'=\frac{-2}{1-2x}=-2(1-2x)^{-1},$$

$$y''=-2(-1)(1-2x)^{-2}(-2)=-2^2(1-2x)^{-2},$$

$$y'''=-2^2(-2)(1-2x)^{-3}(-2)=-2^3\cdot 2(1-2x)^{-3},$$

$$y^{(4)}=-2^3\cdot 2(-3)(1-2x)^{-4}(-2)=-2^4\cdot 3!(1-2x)^{-4}.$$

一般地，有

$$y^{(n)}=-2^n(n-1)!(1-2x)^{-n},$$

所以

$$y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!.$$

解法 2　利用泰勒展开 $y=\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-2x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^n}{n}x^n$，由泰勒展开系数的唯一性，得 $\frac{-2^n}{n}=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$，故 $y^{(n)}(0)=\frac{-2^n}{n}n!=-2^n(n-1)!$.

63 [2015]　函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$________.

答　应填 $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3,\cdots)$.

解法 1　用求函数乘积的 n 阶导数的莱布尼茨公式.

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(2^x)^{(n-k)},$$

其中 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. 注意 $(x^2)^{(k)}\Big|_{x=0}=0(k\neq 2)$，$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，于是

$$f^{(n)}(0)=C_n^2\cdot 2\cdot(2^x)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n\geqslant 2),$$

$$f'(0)=0,$$

因此

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3,\cdots).$$

解法 2　利用泰勒展开 $f(x)=x^2 2^x=x^2e^{x\ln 2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!}x^n$，由泰勒展开系数的唯一性，得 $\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，故 $f^{(n)}(0)=\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!}n!=n(n-1)\ln^{n-2}2,n=2,3,\cdots$.

64 [2016]　已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$________.

答　应填 $5\cdot 2^{n-1}$.

解　$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，$f'(0)=2+2f(0)=4$，

$f''(x)=2+2f'(x)$，$f''(0)=2+2\times 4=10$，

$f'''(x)=2f''(x)$，$f'''(0)=2f''(0)=20$，

……

$f^{(n)}(x)=2f^{(n-1)}(x)=2^2f^{(n-2)}(x)=\cdots=2^{n-2}f''(x)$，

则　$f^{(n)}(0)=2^{n-2}f''(0)=2^{n-2}\cdot 10=5\cdot 2^{n-1}(n\geqslant 2)$.

2.3 导数的几何应用——曲线的切线与法线，变化率

2.3.1 显函数 $y=f(x)$ 表示的曲线

65 [1987—Ⅲ] 曲线 $y=\arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是________；法线方程是________.

答 应填 $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$；$y-\frac{\pi}{4}=-2(x-1)$.

解 $y'=\frac{1}{1+x^2}$，$y'(1)=\frac{1}{2}$，则 $x=1$ 处切线方程为 $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$，法线方程为$y-\frac{\pi}{4}=-2(x-1)$.

66 [1988—Ⅲ] $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点(0,1)处的切线与 x 轴交点坐标是

(A) $\left(-\frac{1}{6},0\right)$. (B) $(-1,0)$. (C) $\left(\frac{1}{6},0\right)$. (D) $(1,0)$.

答 应选(A).

解 $f'(x)=x^2+x+6$，$f'(0)=6$，点(0,1)处的切线方程为 $y-1=6x$，令 $y=0$ 得 $x=-\frac{1}{6}$，即此切线与 x 轴的交点坐标为$\left(-\frac{1}{6},0\right)$.

67 [1989—Ⅲ] 曲线 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线方程是________.

答 应填 $y=2x$.

解 $y'=(x-1)(x-2)$，$y'(0)=2$. 则所求切线方程为 $y-0=2(x-0)$，即 $y=2x$.

68 [1991—Ⅲ] 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点$(1,-1)$处相切，其中 a,b 是常数，则

(A) $a=0,b=-2$. (B) $a=1,b=-3$. (C) $a=-3,b=1$. (D) $a=-1,b=-1$.

答 应选(D).

解 由于曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点$(1,-1)$处相切，则在点$(1,-1)$处两曲线切线斜率相等，且两曲线同时过点$(1,-1)$.

$$y'=2x+a, y'\Big|_{x=1}=2+a.$$

$$2y'=y^3+3xy^2y', y'\Big|_{x=1}=1.$$

则
$$2+a=1, a=-1.$$

又
$$-1=1+a+b=1-1+b=b, b=-1.$$

所以应选(D).

69 [2000] 已知 $f(x)$是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$是当 $x\to0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

解 由
$$\lim_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to0}[8x+\alpha(x)],$$

得 $f(1)-3f(1)=0$，故 $f(1)=0$. 又

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{8x}{\sin x}+\frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]=8,$$

设 $\sin x=t$，则有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}=4f'(1),$$

所以 $f'(1)=2$.

由于 $f(x+5)=f(x)$，所以

$$f(6)=f(1)=0, f'(6)=f'(1)=2,$$

故所求的切线方程为 $y=2(x-6)$，即 $2x-y-12=0$.

注 本题综合涉及函数的周期性、连续性、极限、导数定义及曲线的切线等内容，问题的关键点在于求出 $f'(1)$，而又只能由导数的定义求 $f'(1)$，这也是本题的难点所在.

70 [2010] 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

(A) 4e. (B) 3e. (C) 2e. (D) e.

答 应选(C).

解 设公共切点为 (x_0, y_0)，则有

$$y_0=x_0^2, y_0=a\ln x_0, 2x_0=\frac{a}{x_0},$$

解得 $x_0=\sqrt{e}, y_0=e, a=2e$.

2.3.2 隐函数 $F(x,y)=0$ 表示的曲线

71 [2001] 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos xy=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

答 应填 $x-2y+2=0$.

解 方程 $e^{2x+y}-\cos xy=e-1$ 两边同时对 x 求导得

$$e^{2x+y}\left(2+\frac{dy}{dx}\right)+\sin xy\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

将 $x=0, y=1$ 代入解得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-2$.

故所求的法线方程为

$$x-2y+2=0.$$

72 [2003] 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是________.

答 应填 $x-y=0$.

解 在 $xy+2\ln x=y^4$ 两端对 x 求导得

$$y+x\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}=4y^3\frac{dy}{dx},$$

将 $x=1, y=1$ 代入上式得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=1$，故所求切线方程为

$$y-1=x-1，即 x-y=0.$$

73 [2008] 曲线 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是________.

答 应填 $y=x+1$.

解 令 $f(x,y)=\sin xy+\ln(y-x)-x$，则

$$f_x'(0,1)=\left.\left(y\cos xy+\frac{-1}{y-x}-1\right)\right|_{(0,1)}=-1,$$

$$f_y'(0,1)=\left.\left(x\cos xy+\frac{1}{y-x}\right)\right|_{(0,1)}=1.$$

于是，$y'\Big|_{(0,1)}=-\frac{f_x'(0,1)}{f_y'(0,1)}=1$，故所求切线方程为 $y=x+1$.

2.3.3 参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 表示的曲线

74 [1990－Ⅲ] 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 上对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的法线方程是________.

答 应填 $y=\sqrt{3}x-1$.

解 当 $t=\frac{\pi}{6}$ 时，$x=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$y=\frac{1}{8}$. 又

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{\sin t}{-\cos t},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

则 $t=\frac{\pi}{6}$ 处法线方程为 $y-\frac{1}{8}=\sqrt{3}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$，即 $y=\sqrt{3}x-1$.

75 [1995—Ⅲ] 曲线 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为________.

答 应填 $3x-y-7=0$.

解 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\left.\frac{3t^2}{2t}\right|_{t=2}=3$. 当 $t=2$ 时，$x=5$，$y=8$. 则所求切线方程为 $y-8=3(x-5)$，即 $3x-y-7=0$.

76 [1999] 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

答 应填 $y+2x-1=0$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\sin 2t+2\mathrm{e}^t\cos 2t}.$$

当 $x=0$，$y=1$ 时，$t=0$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\frac{1}{2},$$

从而在点 $(0,1)$ 处法线的斜率为 -2，法线方程为

$$y-1=-2x.$$

77 [2005] 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.　　(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.

答 应选(A).

解 由 $x=3$ 得 $3=t^2+2t$，解之得 $t_1=1$，$t_2=-3$，由 $y=\ln(1+t)$ 知应取 $t=1$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}\right|_{t=1}=\frac{1}{8},$$

故曲线在 $(3,\ln 2)$ 处的法线方程为

$$y-\ln 2=-8(x-3).$$

令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{8}\ln 2+3$.

78 [2007] 曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\ y=1+\sin t\end{cases}$ 上对应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________.

答 应填 $1+\sqrt{2}$.

解 因

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\cos t}{-\sin t-2\sin t\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=-\frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

故曲线上对应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的法线斜率为 $1+\sqrt{2}$.

79 [2009] 曲线 $\begin{cases}x=\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

答 应填 $y=2x$.

解 点(0,0)对应于 $t=1$. 因为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\left[2t\ln(2-t^2)+t^2\cdot\frac{-2t}{2-t^2}\right]\right|_{t=1}=-2,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\mathrm{e}^{-(1-t)^2}\cdot(-1)\right|_{t=1}=-1,$$

所以切线斜率为

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=1}=2,$$

故切线方程为 $y=2x$.

80 [2013] 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________.

答 应填 $x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

解 曲线上对应于 $t=1$ 的点处的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}\right|_{t=1}=1,$$

因而该点处的法线斜率为 -1.

又

$$\left.x\right|_{t=1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4},\left.y\right|_{t=1}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2,$$

于是所求法线方程为

$$y-\frac{1}{2}\ln 2=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\text{即 } x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

2.3.4 极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ 表示的曲线

81 [2002] 已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

解 由直角坐标与极坐标之间的关系 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 得到此曲线的参数方程:

$$\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta,\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta.\end{cases}$$

将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入,得到切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

由参数方程求导公式得切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=1,$$

所以切线的直角坐标方程为

$$y-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=1\cdot\left[x-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\right)\right],$$

即

$$x-y+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{3}=0;$$

法线方程为
$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\left(x+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
即
$$x+y+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0.$$

82 [2014] 曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是________.

答 应填 $\frac{2}{\pi}x+y-\frac{\pi}{2}=0$.

解 先把曲线方程化为参数方程 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta,\end{cases}$ 于是在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处，$x=0$，$y=\frac{\pi}{2}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，即 $\frac{2}{\pi}x+y-\frac{\pi}{2}=0$.

2.3.5 变化率

83 [2010] 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加，宽 w 以 3 cm/s 的速率增加. 则当 $l=12$ cm，$w=5$ cm时，它的对角线增加的速率为________.

答 应填 3 cm/s.

解 以 y 表示对角线的长，则有
$$y=\sqrt{l^2+w^2},\ y'=\frac{1}{\sqrt{l^2+w^2}}(ll'+ww'),$$
将 $l'=2,w'=3,l=12,w=5$ 代入得到
$$y'=\frac{12\times2+5\times3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3(\mathrm{cm/s}).$$

84 [2016] 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点(1,1)时，l 对时间的变化率是________.

答 应填 $2\sqrt{2}v_0$.

解 由题设知 $l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，则
$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{(2x+6x^5)}{2\sqrt{x^2+x^6}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{(1,1)}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0.$$

2.4 函数(曲线)的性态

2.4.1 函数的单调性与极值、最值

考点点睛

1. 函数取极值的必要条件

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极值，则 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

2. 极值的第一充分条件(用一阶导)

设 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

(1)若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

(2)若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

(3)若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 内不变号，则 $x=x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

3. 极值的第二充分条件(用二阶导)

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导,且 $f'(x_0)=0,f''(x_0)\neq0$,则

(1)当 $f''(x_0)<0$ 时,$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点;

(2)当 $f''(x_0)>0$ 时,$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点;

(3)当 $f''(x_0)=0$ 时,该判别法失效.

4. 极值的第三充分条件(用高阶导)

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq0$,$n$ 是偶数,则 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,$f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

85 [1987—Ⅲ] 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且导数 $f'(x)$ 恒大于零,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

证 对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$,不妨设 $x_1<x_2$,则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,在 (x_1,x_2) 内可导,故由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 内恒大于零,所以 $f'(\xi)>0$,又 $x_2-x_1>0$,因此 $f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

86 [1987—Ⅲ] 若 $g(x)$ 在 $x=c$ 处二阶导数存在,且 $g'(c)=0,g''(c)<0$,则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

证 因 $g''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g'(x)-g'(c)}{x-c}<0$,而 $g'(c)=0$,故 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g'(x)}{x-c}<0$. 由极限的保号性,存在 $\delta>0$,当 $x\in(c-\delta,c)$ 时,有 $\dfrac{g'(x)}{x-c}<0$,即 $g'(x)>0$,从而 $g(x)$ 在 $(c-\delta,c)$ 上单调递增;当 $x\in(c,c+\delta)$ 时,有 $\dfrac{g'(x)}{x-c}<0$,即 $g'(x)<0$,从而 $g(x)$ 在 $(c,c+\delta)$ 上单调递减.

又由 $g'(c)=0$ 知,$x=c$ 是 $g(x)$ 的驻点,因此 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

87 [1987—Ⅲ] 在第一象限内求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点,使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小,并求此最小面积.

解 设所求点为 (x_1,y_1),$x_1>0,y_1>0$,于是 $y'\Big|_{x=x_1}=-2x_1$. 过 (x_1,y_1) 的切线方程为

$$y-y_1=-2x_1(x-x_1).$$

令 $x=0$ 得切线在 y 轴的截距 $b=x_1^2+1$,令 $y=0$ 得切线在 x 轴的截距 $a=\dfrac{x_1^2+1}{2x_1}$.

于是,所求面积为

$$S(x_1)=\frac{1}{2}ab-\int_0^1(-x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(x_1^3+2x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\frac{2}{3}.$$

令

$$S'(x_1)=\frac{1}{4}\left(3x_1^2+2-\frac{1}{x_1^2}\right)=\frac{1}{4}\left(3x_1-\frac{1}{x_1}\right)\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=0,$$

得 $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

又 $S''(x_1)\Big|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{4}\left(6x_1+\dfrac{2}{x_1^3}\right)\Big|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}>0$,即知点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{3}\right)$ 为所求,此时 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$.

88 [1988—Ⅲ] 将长为 a 的铁丝切成两段,一段围成正方形,另一段围成圆形,问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小.

解 设圆形的周长为 x,则正方形的周长为 $a-x$,两图形的面积之和为

$$A=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16},$$

$$A'=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{a}{8},A''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0.$$

令 $A'=0$,得 $x=\frac{\pi a}{4+\pi}$,故当圆的周长为 $x=\frac{\pi a}{4+\pi}$,正方形的周长为 $a-x=\frac{4a}{4+\pi}$时,两图形的面积之和最小.

89 [1989—Ⅲ] 设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$处

(A)必取极大值.
(B)必取极小值.
(C)不可能取极值.
(D)是否取极值不能确定.

答 应选(D).

解 本题的关键在于由题设可知在 $x=a$ 的某邻域内有 $f(a)\geqslant f(x)$,$g(a)\geqslant g(x)$,由此能否得到 $g(a)f(a)\geqslant g(x)f(x)$或 $g(a)f(a)\leqslant g(x)f(x)$,在一般情况下是得不到此结论的.

若取 $f(x)=-(x-a)^2$,$g(x)=-(x-a)^2$,显然 $f(x)$和 $g(x)$在 $x=a$ 处取极大值 0,但$f(x)g(x)=(x-a)^4$ 在 $x=a$ 处取极小值.则(A),(C)都不正确;若取 $f(x)=1-(x-a)^2$,$g(x)=1-(x-a)^2$,则$f(x)$和 $g(x)$都在 $x=a$ 处取极大值 1,而 $f(x)g(x)=[1-(x-a)^2]^2$ 在 $x=a$ 处仍取极大值 1,则(B)也不正确,从而只有(D)对.

90 [1990—Ⅲ] 已知 $f(x)$在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在 $x=0$ 处 $f(x)$

(A)不可导.
(B)可导且 $f'(0)\neq0$.
(C)取得极大值.
(D)取得极小值.

答 应选(D).

解 由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$,且$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$,故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$. 又$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2f(x)}{x^2}=2$,故$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1>0$. 由极限的保号性可知在 $x=0$ 的去心邻域内有$\frac{f(x)}{x^2}>0$,即 $f(x)>0$,故 $f(x)$在 $x=0$ 处取极小值,从而选(D).

注 易知 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{x}{1-\cos x}=2$.

由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1-\cos x}=\infty$,则必有$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$,即 $f'(0)=0$. 排除(A),(B).

91 [1990—Ⅲ] 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P,使该点处的切线,椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小(其中$a>0,b>0$).

解 设所求点为 $P(x_0,y_0)$,则该点处的切线方程为$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$,

图形面积为
$$S=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}-\frac{1}{4}\pi ab,x_0\in(0,a).$$

设 $A=x_0y_0=\frac{bx_0}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$,可得 $x_0=\frac{a}{\sqrt2}$为 A 的极大值点,即 S 的极小值点,此时,$y_0=\frac{b}{\sqrt2}$,即所求点为 $P\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)$.

92 [1991—Ⅲ] 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$x_0\neq0$ 是函数 $f(x)$的极大值点,则

(A)x_0 必是 $f(x)$的驻点.
(B)$-x_0$ 必是$-f(-x)$的极小值点.
(C)$-x_0$ 必是$-f(x)$的极小值点.
(D)对一切 x 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$.

答 应选(B).

解法 1 排除法. $f(x)=-|x-x_0|$,显然 $f(x)$在 x_0 处取极大值,但 $f'(x_0)$不存在,则 x_0 不是 $f(x)$的驻点,从而(A)不对. 又$-f(x)=|x-x_0|$,显然$-f(x)$只有唯一极小值点 $x=x_0$,又$x_0\neq0$,则 $x_0\neq-x_0$,从而$-x_0$ 不是$-f(x)$的极小值点,则(C)也不对.(D)显然不对,由于极值是一个局部性质,不能保证对一切

x 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，而只能保证在 x_0 某邻域内有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，所以应选(B).

解法 2　直接法. 由于 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 时，$f(x_0)\geqslant f(x)$，前面两不等式两边同乘 -1 得，即当 $-x_0-\delta<-x<-x_0+\delta$ 时，$-f(x_0)\leqslant -f(x)$.

也就是，当 $-x_0-\delta<-x<-x_0+\delta$ 时，$-f[-(-x_0)]\leqslant -f[-(-x)]$，即 $-f(-x)$ 在 $-x_0$ 取极小值.

注　本题从几何直观上更简洁，注意到 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 关于 y 轴对称，$f(x)$ 与 $-f(x)$ 关于 x 轴对称，$f(x)$ 与 $-f(-x)$ 关于原点对称.

93 [1991—Ⅲ]　如图 1—2—2，A,D 分别是曲线 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 上的点，AB 和 DC 均垂直 x 轴，且 $|AB|:|DC|=2:1$，$|AB|<1$. 求点 B 和 C 的横坐标，使梯形 $ABCD$ 的面积最大.

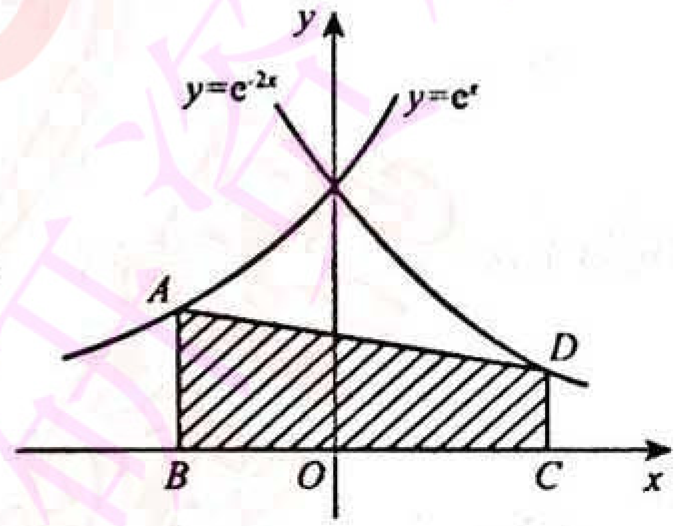


图 1—2—2

解　设 B,C 的横坐标分别为 x_1,x，则

$$e^{x_1}=2e^{-2x},$$

得

$$x_1=\ln 2-2x,$$

$$|BC|=x-x_1=3x-\ln 2,x>0,$$

梯形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{3}{2}(3x-\ln 2)e^{-2x}$，则 $S'=\frac{3}{2}(-6x+2\ln 2+3)e^{-2x}$.

令 $S'=0$，得 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$. 于是由问题的实际意义可得，当 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$，$x_1=\frac{1}{3}\ln 2-1$ 时，梯形面积最大.

94 [1992—Ⅲ]　函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为________.

答　应填 $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.

解　$y'=1-2\sin x$，$y''=-2\cos x$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{\pi}{6}$，$y''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$，则 $y=x+2\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 取得极大值，又在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上极值点唯一，则该极大值为最大值，最大值为 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.

95 [1992—Ⅲ]　求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l，使该曲线与切线 l 及直线 $x=0,x=2$ 所围成图形面积最小.

解　因为 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以 $y=\sqrt{x}$ 在点 $(t,\sqrt{t})$ 处的切线 l 方程为

$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)，即\ y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

所围面积为 $S(t)=\int_0^2\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}\right)-\sqrt{x}\right]dx=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

令 $S'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=0$，得 $t=1$.

又 $S''(1)>0$，故 $t=1$ 时，S 取最小值. 此时 l 的方程为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

96 [1993—Ⅲ]　设 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\,(x>0)$，则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是________.

答　应填 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

解　$F'(x)=\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x>0)$，令 $2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$，解得 $0<x<\frac{1}{4}$. 则 $F(x)$ 单调减少区间为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

97 [1993—Ⅲ]　作半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积 V 最小，并求出该最小值.

解 如图 1—2—3 所示，设圆锥底面圆半径为 R. 则

$$R=\frac{rh}{\sqrt{h^2-2hr}},$$

于是圆锥体积为

$$V(h)=\frac{\pi}{3}R^2h=\frac{\pi r^2}{3}\frac{h^2}{h-2r},2r<h<+\infty.$$

由

$$V'(h)=\frac{\pi r^2}{3}\frac{h^2-4rh}{(h-2r)^2},$$

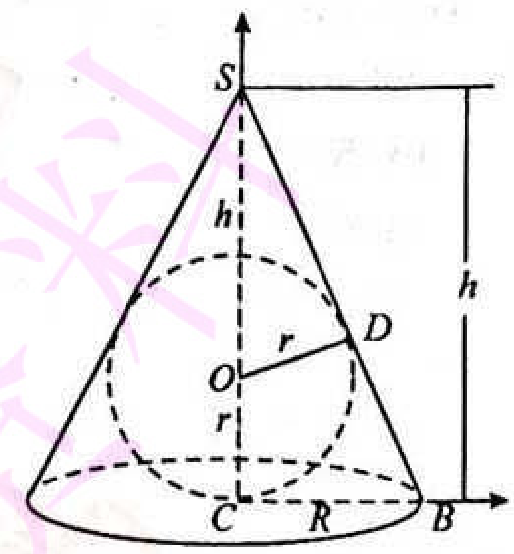


图 1—2—3

可得 $V(h)$ 在 $(2r,+\infty)$ 内的唯一驻点 $h=4r$，当 $h=4r$ 时，V 取最小值，

$$V(4r)=\frac{8\pi r^3}{3}.$$

98 [1994—Ⅲ] 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在

(A) x_0 某邻域内单调增加. (B) x_0 某邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值. (D) x_0 处取得极大值.

答 应选(C).

解 由于 $y=f(x)$ 满足方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$，则

$$f''(x)+f'(x)-e^{\sin x}\equiv 0,$$

令 $x=x_0$，得

$$f''(x_0)+f'(x_0)-e^{\sin x_0}=0,$$

即

$$f''(x_0)=e^{\sin x_0}>0,$$

又 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

注 本题不要试着去解方程得到 $y=f(x)$ 的表达式，我们关心的是 x_0 这一点的导数.

99 [1995—Ⅲ] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则

(A) 对任意 x，$f'(x)>0$. (B) 对任意 x，$f'(-x)\leqslant 0$.

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加. (D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

答 应选(D).

解 由于对任意的 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时 $-x_1<-x_2$，则有 $f(-x_1)<f(-x_2)$，即 $-f(-x_1)>-f(-x_2)$，也就是说，当 $x_1>x_2$ 时，$-f(-x_1)>-f(-x_2)$，故 $-f(-x)$ 单调增加.

注 由题意知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，则 $f(-x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少，则 $[f(-x)]'=f'(-x)\cdot(-1)\leqslant 0$，故 $f'(-x)\geqslant 0$，(B)错误. 这里要知道 $f'(-x)$ 表示的是对中间变量 $u=-x$ 这个整体求导，与 $[f(-x)]'$ 不是一回事.

100 [1995—Ⅲ] 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

解 因 $f(x)$ 是偶函数，故只需求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值与最小值.

令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$，在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一驻点 $x=\sqrt{2}$.

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $x=\sqrt{2}$ 是极大值点，即最大值点.

最大值 $f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{-t}dt=1+e^{-2}$.

又 $$\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=2-1=1,\ f(0)=0,$$

故 $f(x)$ 的最小值是 0.

101 [1996—Ⅲ] 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它是否为极值点.

解 对方程两边求导可得

$$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0, \qquad (*)$$

令 $y'=0$，由$(*)$得 $y=x$，将此代入原方程有

$$2x^3-x^2-1=0,$$

从而可得唯一驻点 $x=1$. 对$(*)$式两边再求导，得

$$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)y'^2+2y'-1=0,$$

因此 $y''\Big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$，故 $x=1$ 是 $y=y(x)$的极小值点.

102 [1997] 已知函数 $y=f(x)$对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq0)$，则

(A) $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值.

(B) $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值.

(C) $(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D) $f(x_0)$不是 $f(x)$的极值，$(x_0,f(x_0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

答 应选(B).

解 由 $f'(x_0)=0$ 知 x_0 是 $f(x)$的驻点. 将 $x=x_0$ 代入微分方程 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$中，得

$$f''(x_0)=\frac{e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}},$$

无论 $x_0(x_0\neq0)$为何值，$f''(x_0)>0$，根据极值存在的第二充分条件知，$x=x_0$ 是函数 $f(x)$的极小值点.

103 [1998] 设函数 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$时，必有

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant0$.

(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant0$.

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant0(x\neq a)$.

(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant0(x\neq a)$.

答 应选(C).

解 函数在点 $x=a$ 处取极大值，按定义，存在一个邻域$(a-\delta,a+\delta)$，使当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$时，有 $f(x)\leqslant f(a)$. 所以当 $a-\delta<x<a$ 时，

$$(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant0;$$

当 $a<x<a+\delta$ 时，

$$(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant0,$$

因此，(A)，(B)均错. 至于(C)，(D)两项，由于 $f(t)$在 $t=a$ 处连续，且 $x\neq a$，故(C)，(D)分别就是 $f(a)-f(x)\geqslant0$ 及 $f(a)-f(x)\leqslant0$，当 $f(a)$为极大值时(C)成立，应选(C).

104 [2000] 设函数 $f(x)$满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则

(A) $f(0)$是 $f(x)$的极大值.

(B) $f(0)$是 $f(x)$的极小值.

(C) 点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D) $f(0)$不是 $f(x)$的极值，点$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

答 应选(C).

解 由 $f'(0)=0$ 知 $x=0$ 是函数 $f(x)$的一个驻点. 由关系式知 $f''(0)=0$，即$(0,f(0))$可能是拐点. 如何判断？可以分别考查 $f'(x)$与 $f''(x)$在点 $x=0$ 的左右邻域是否变号，但在本题中这不容易做到，于是去求 $f(x)$在点 $x=0$ 处的更高阶的导数. 仍由原关系式可得 $f'''(0)=1$. 从而得知点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点，即选项(C)是正确的.

注 可导函数的极值点与拐点不可能是同一个点的.

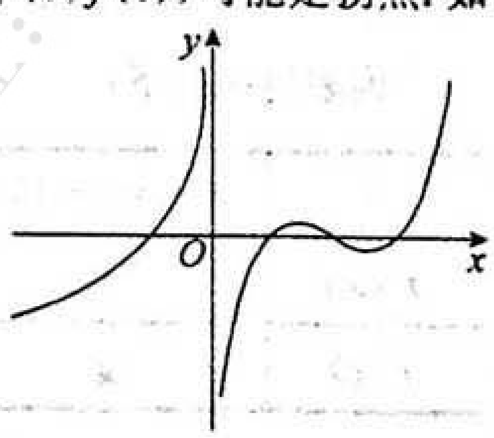
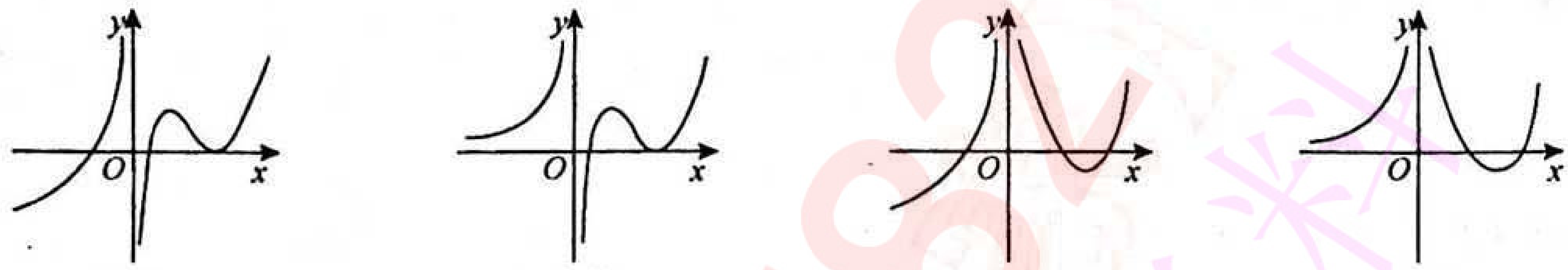


图 1-2-4

105 [2001] 已知函数 $y=f(x)$在其定义域内可导，它的图形如图1-2-4所示，则其导函数 $y=f'(x)$的图形为



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

答　应选(D).

解　抓住 $y=f(x)$ 的图形中的曲线上升($f'(x)\geqslant 0$)、下降($f'(x)\leqslant 0$)区间，驻点($f'(x)=0$)的个数，就可知应选(D).

106 [2003]　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图 1—2—5 所示，则 $f(x)$ 有

(A)一个极小值点和两个极大值点.

(B)两个极小值点和一个极大值点.

(C)两个极小值点和两个极大值点.

(D)三个极小值点和一个极大值点.

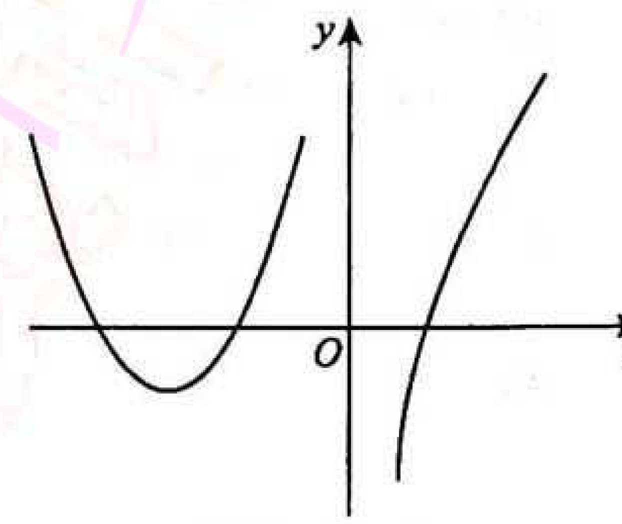


图 1—2—5

答　应选(C).

解　因 $f(x)$ 处处连续，故其一阶导数等于 0 的点(驻点)和一阶导数不存在的点是可能的极值点. 当 x 自左至右经过这些点时，导数符号由正变负，则该点为极大值点；当 x 自左至右经过这些点时，导数符号由负变正，则该点为极小值点. 故应选择(C). 由于本题题型新颖，特别是考生未考虑 $x=0$ 处的情况，因此相当多考生选择了(B).

107 [2009]　函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________.

答　应填 $e^{-\frac{2}{e}}$.

解　因为 $y'=x^{2x}(2\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得驻点 $x=\dfrac{1}{e}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$y'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 时，$y'(x)>0$，即 $y(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 内单调减少，在 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 内单调增加，故 $x=\dfrac{1}{e}$ 为 $y=x^{2x}$ 的极小值点，此时 $y=e^{-\frac{2}{e}}$.

又
$$y(1)=1,y(0^+)=\lim_{x\to 0^+}x^{2x}=\lim_{x\to 0^+}e^{2x\ln x}=1,$$

所以 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 $y\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$.

108 [2010]　求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由于

$$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt,$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt,$$

所以 $f(x)$ 的驻点为 $x=0,\pm 1$.

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

因此，$f(x)$的单调增加区间为$(-1,0)$和$(1,+\infty)$；$f(x)$的单调减少区间为$(-\infty,-1)$和$(0,1)$. $f(x)$的极小值为 $f(\pm1)=\int_1^1(1-t)e^{-t^2}dt=0$；极大值为 $f(0)=-\int_1^0 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

109 [2014]　已知函数 $y=y(x)$满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$的极大值与极小值.

解　由 $x^2+y^2y'=1-y'$，得 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$. 令 $y'=0$，得 $x=\pm1$.

当 $x<-1$ 时，$y'<0$；当 $-1<x<1$ 时，$y'>0$；当 $x>1$ 时，$y'<0$. 因此，$x=-1$ 为其极小值点，$x=1$ 为其极大值点.

将原方程分离变量后得
$$(1+y^2)dy=(1-x^2)dx,$$
其通解为
$$x^3+y^3-3x+3y=C.$$
又 $y(2)=0$，得 $C=2$. 故 $x^3+y^3-3x+3y=2$.

所以，$y(x)$的极小值为 $y(-1)=0$，$y(x)$的极大值为 $y(1)=1$.

110 [2017]　已知函数 $y(x)$由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$的极值.

解　由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$，关于 x 分别求一阶导、二阶导
$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0, \tag{①}$$
$$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0. \tag{②}$$
在①式中令 $y'=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=1$.

当 x 分别取 -1 和 1 时，由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 得 $y(-1)=0$，$y(1)=1$.

将 $x=-1$，$y(-1)=0$ 及 $y'(-1)=0$ 代入②式得 $y''(-1)=2$.

因为 $y'(-1)=0$，$y''(-1)>0$，所以 $y(-1)=0$ 是 $y(x)$的极小值.

将 $x=1$，$y(1)=1$ 及 $y'(1)=0$ 代入②式得 $y''(1)=-1$.

因为 $y'(1)=0$，$y''(1)<0$，所以 $y(1)=1$ 是 $y(x)$的极大值.

2.4.2　曲线的凹凸性与拐点

考点点睛

1. 曲线取拐点的必要条件

若$(x_0,f(x_0))$是曲线 $f(x)$的拐点，则 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$不存在.

2. 拐点的第一充分条件(用二阶导)

设 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续，且在点 x_0 的某去心邻域内二阶可导.

(1)若 $f''(x)$在 $x=x_0$ 的左右两侧变号，则点$(x_0,f(x_0))$是曲线的拐点；

(2)若 $f''(x)$在 $x=x_0$ 的左右两侧不变号，则点$(x_0,f(x_0))$不是曲线的拐点.

注　上述“拐点的第一充分条件”反映在连续函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的图形上就是 $f'(x)$的单调性相反的点.

3. 拐点的第二充分条件(用三阶导)

设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq0$，则$(x_0,f(x_0))$是曲线的拐点.

4. 拐点的第三充分条件(用高阶导)

设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，且 $f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq0$，$n$ 是奇数$(n\geqslant3)$，则$(x_0,f(x_0))$是曲线的拐点.

111 [1990—Ⅲ]　求曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}(x>0)$的拐点.

解
$$y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},y''=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

令 $y''=0$，解得 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 因在点 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的左、右邻域 y'' 变号，故 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 是拐点的横坐标.

所以曲线的拐点是 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$.

112 [1991－Ⅲ] 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的凸区间是________.

答 应填 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解
$$y'=-2xe^{-x^2},y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1),$$
令 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，且当 $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$y''<0$，则曲线 $y=e^{-x^2}$ 是凸的.

113 [1993－Ⅲ] 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内

(A) $f'(x)<0,f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)<0,f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0,f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)>0,f''(x)>0$.

答 应选(C).

解法 1 由 $f(x)=-f(-x)$ 知 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)$ 的图形关于原点对称，从而由在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$ 可知，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，因此应选(C).

解法 2 等式 $f(x)=-f(-x)$ 两边对 x 求导得
$$f'(x)=f'(-x),f''(x)=-f''(-x).$$
当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-x\in(-\infty,0)$，则
$$f'(-x)=f'(x)>0,f''(-x)=-f''(x)<0.$$
故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$.

114 [2001] 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

答 应选(C).

解 本题的曲线对称于直线 $x=2$，所以，它或者没有拐点或者只有 2 个拐点，因此(B)，(D)被排除. 又
$$y'=4(x-1)(x-2)(x-3),$$
对导函数 y' 应用罗尔中值定理，y'' 有两个零点，从而知原曲线有两个拐点. 也可直接求函数的二阶导数的零点，再判断在零点左、右邻域的二阶导数是否变号.

115 [2004] 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围为________.

答 应填 $(-\infty,1)$（或 $(-\infty,1]$）.

解 因
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$
由题设知 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$，故 $t<0$. 又 $x'(t)=3t^2+3>0$，$x(t)$ 为 t 的单调增加函数. 当 $t=0$ 时，$x=1$，
$$\lim_{t\to-\infty}x(t)=\lim_{t\to-\infty}(t^3+3t+1)=-\infty,$$
故 x 的取值范围是 $(-\infty,1)$（或 $(-\infty,1]$）.

116 [2004] 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

答 应选(C).

解 因为 $f(x)=|x(1-x)|\geqslant 0$，$f(0)=0$，故 $x=0$ 是极值点，因而选项(B)与(D)不正确. 而在点 $x=0$ 的邻域内：

当 $x<0$ 时，$f(x)=-x(1-x)=x^2-x$，$f''(x)=2>0$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=x(1-x)=x-x^2$，$f''(x)=-2<0$，

所以 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 选项(C)正确.

117 [2008] 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为________.

答 应填 $(-1,-6)$.

解
$$y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}},\ y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=-1$，又 $x\to 0$ 时，$y''\to+\infty$. 由于在 $x=-1$ 的左、右邻域内 y'' 变号，在 $x=0$ 的左、右邻域内 y'' 不变号，故拐点为 $(-1,-6)$.

118 [2011] 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}, \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求函数 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}.$$

令 $\frac{dy}{dx}=0$，得 $t=\pm1$. 当 $t=1$ 时，$x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$；当 $t=-1$ 时，$x=-1$，$y=1$.

令 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$，得 $t=0$，此时 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$.

列表如下：

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

由此可知，函数 $y(x)$ 的极大值为 $y(-1)=1$，极小值为 $y\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{3}$；

曲线 $y=y(x)$ 的凹区间为 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，凸区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$；

曲线 $y=y(x)$ 的拐点为 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

119 [2014] 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$. (B) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$. (D) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

答 应选(D).

解法 1 如果对区间上任意两点 x_1,x_2 及常数 $\lambda\in[0,1]$，恒有
$$f[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]\leqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2),$$
则曲线是凹的.

令 $x_1=0$，$x_2=1$，$\lambda=x$，则 $(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)=f(0)(1-x)+f(1)x=g(x)$，而

$$f[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]=f(x),$$

故当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,曲线是凹的,即

$$f[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]\leqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2),$$

也就是 $f(x)\leqslant g(x)$,应选(D).

解法 2 令 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$,则 $F(0)=F(1)=0$,且 $F''(x)=f''(x)$,故当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,曲线是凹的,从而 $F(x)$ 在端点 $x=0,x=1$ 处取最大值,而 $F(0)=F(1)=0$,故 $F(x)=f(x)-g(x)\leqslant 0$,也就是 $f(x)\leqslant g(x)$,应选(D).

120 [2015] 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其二阶导函数 $f''(x)$的图形如图 1—2—6 所示,则曲线 $y=f(x)$的拐点个数为

(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

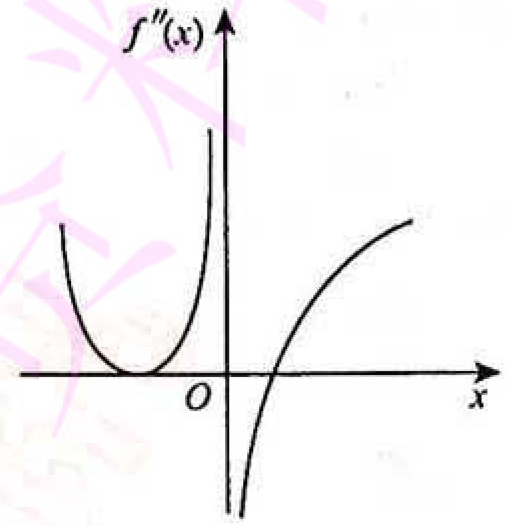


图 1—2—6

答 应选(C).

解 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,除点 $x=0$ 外处处二阶可导. $y=f(x)$的可疑拐点是 $f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$不存在的点.

$f''(x)$的零点有 2 个,如图 1—2—7 所示,A 点两侧 $f''(x)$恒正,对应的点不是 $y=f(x)$的拐点. B 点两侧 $f''(x)$异号,对应的点是 $y=f(x)$的拐点.

虽然 $f''(0)$不存在,但点 $x=0$ 两侧 $f''(x)$异号,因而$(0,f(0))$是 $y=f(x)$的拐点.

因此共有两个拐点.

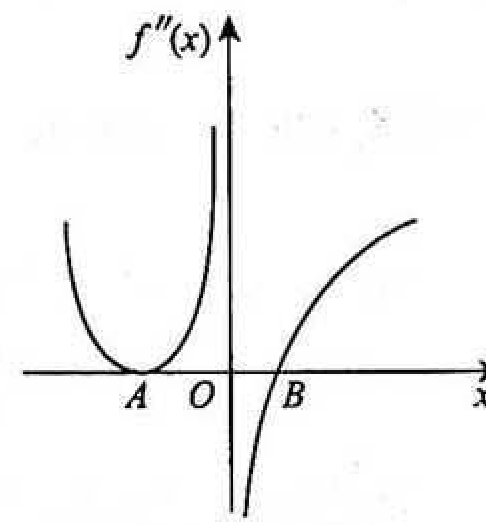


图 1—2—7

121 [2016] 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形如图 1—2—8 所示,则

(A)函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点.

(B)函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 3 个拐点.

(C)函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 1 个拐点.

(D)函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点.

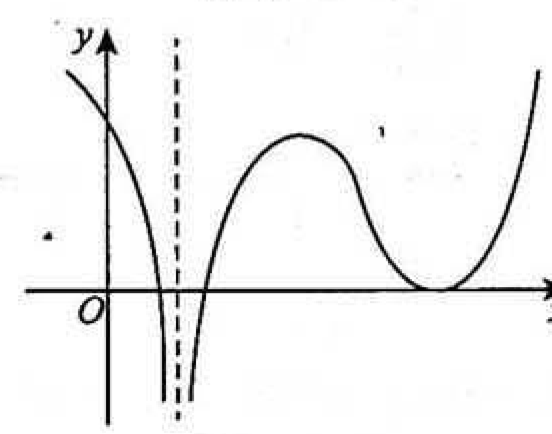


图 1—2—8

答 应选(B).

解 如图 1—2—9 所示,x_1,x_3,x_5 为驻点,而在 x_1 和 x_3 两侧 $f'(x)$变号,为极值点;x_5 两侧 $f'(x)$不变号,则不是极值点;在 x_2 处一阶导数不存在,但在 x_2 两侧 $f'(x)$不变号,则不是极值点;在 x_2 处二阶导数不存在,在 x_4 和 x_5 处二阶导数为零,在这 3 个点两侧一阶导函数单调性发生变化,则都为拐点,故应选(B).

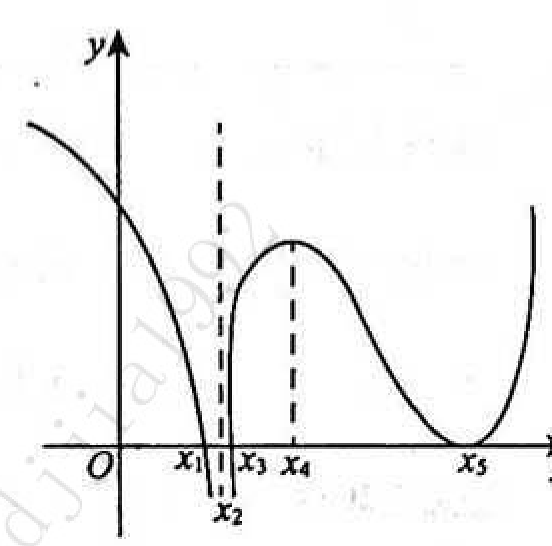


图 1—2—9

2.4.3 渐近线、曲率,描绘函数图形

122 [1988—Ⅲ] 作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$的图形,并填写下表.

单调增加区间		凹(∪)区间	
单调减少区间		凸(∩)区间	
极值点		拐 点	
极 值		渐近线	

解

单调增加区间	$(-\infty,1)$
单调减少区间	$(1,+\infty)$
极值点	1
极　值	2
凹(∪)区间	$(-\infty,0)$及$(2,+\infty)$
凸(∩)区间	$(0,2)$
拐　点	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$及$\left(2,\frac{3}{2}\right)$
渐近线	$y=0$

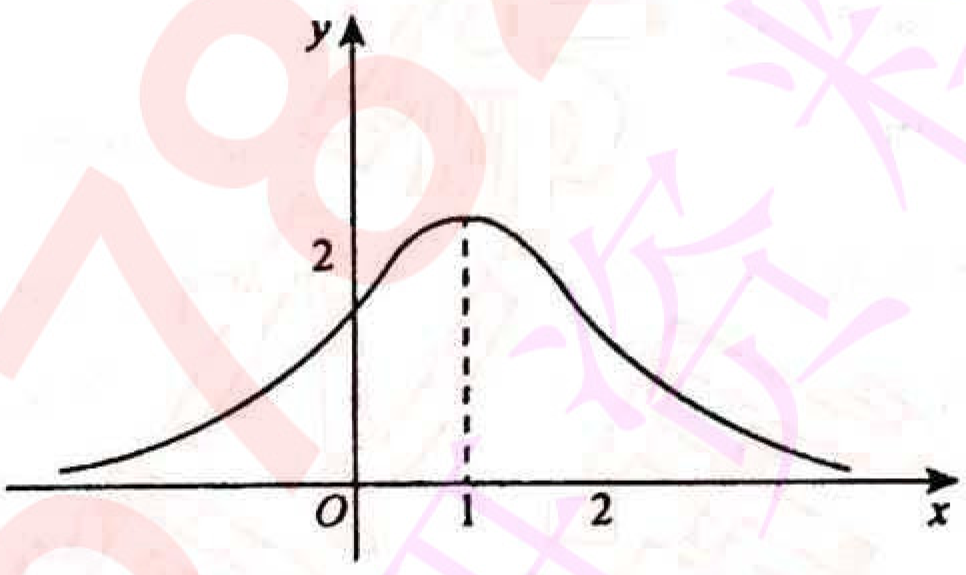


图 1—2—10

函数图形如图 1—2—10 所示.

123 [1989—Ⅲ]　当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$

(A)有且仅有水平渐近线.　(B)有且仅有铅直渐近线.

(C)既有水平渐近线,也有铅直渐近线.　(D)既无水平渐近线,也无铅直渐近线.

答　应选(A).

解　由于$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$,又$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$,则原曲线在$(0,+\infty)$有且仅有水平渐近线 $y=1$.

124 [1989—Ⅲ]　对函数 $y=\frac{x+1}{x^2}$ 填写下表.

单调减区间	
单调增区间	
极　值　点	
极　　　值	
凹　区　间	
凸　区　间	
拐　　　点	
渐　近　线	

解

单调减区间	$(-\infty,-2),(0,+\infty)$	凹区间	$(-3,0),(0,+\infty)$
单调增区间	$(-2,0)$	凸区间	$(-\infty,-3)$
极　值　点	-2	拐　点	$\left(-3,-\frac{2}{9}\right)$
极　　　值	$-\frac{1}{4}$	渐近线	$x=0$ 和 $y=0$

125 [1994—Ⅲ] 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有

(A)1 条. (B)2 条. (C)3 条. (D)4 条.

答 应选(B).

解 由
$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{\pi}{4},$$
可知原曲线有水平渐近线 $y=\frac{\pi}{4}$. 又 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\infty$,则原曲线有铅直渐近线 $x=0$,虽然原题中当 $x=1,x=-2$ 时分母为零,但 $\lim\limits_{x\to1}y$ 和 $\lim\limits_{x\to-2}y$ 都不是∞,故原曲线的渐近线有 2 条.

126 [1994—Ⅲ] 设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$,求

(1)函数的增减区间及极值;

(2)函数图像的凹凸区间及拐点;

(3)渐近线;

(4)作出其图形.

解 定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 当 $x=-\sqrt[3]{4}$时,$y=0$.

(1)$y'=1-\frac{8}{x^3}$,故驻点为 $x=2$. 又

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	−	0	+
y	↗	↘	3	↗

所以,$(-\infty,0)$及$(2,+\infty)$为增区间,$(0,2)$为减区间,$x=2$ 为极小值点,极小值为 $y=3$.

(2)$y''=\frac{24}{x^4}>0$,故$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$均为凹区间,无拐点.

(3)因$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1=a$,
$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=0=b,$$
所以,$x=0$ 为铅直渐近线,$y=x$ 为斜渐近线.

(4)函数的图形如图 1—2—11 所示.

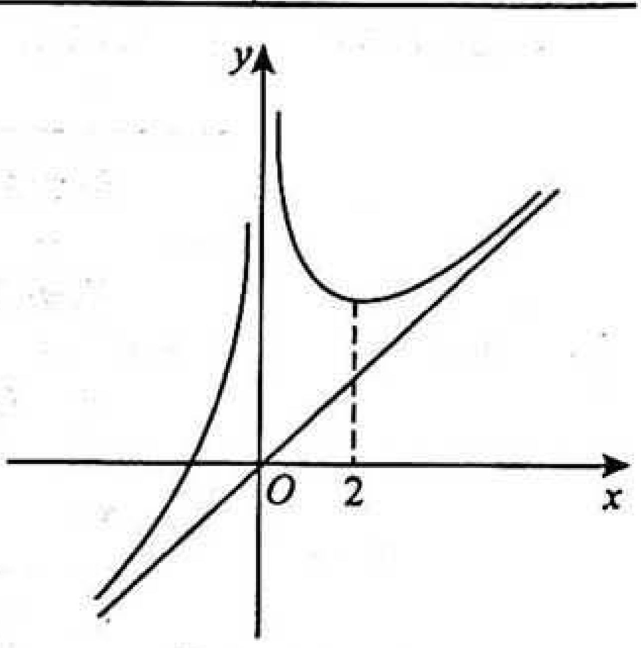


图 1—2—11

127 [1995—Ⅲ] 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为________.

答 应填 $y=0$.

解 由于$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$,原曲线仅有一条水平渐近线 $y=0$.

128 [1995—Ⅲ] 如图 1—2—12,设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$,且$y''>0$,又 MT,MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为$\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$(其中$y_0'=y'(x_0)$,$y_0''=y''(x_0)$),试推导出点 $P(\xi,\eta)$的坐标表达式.

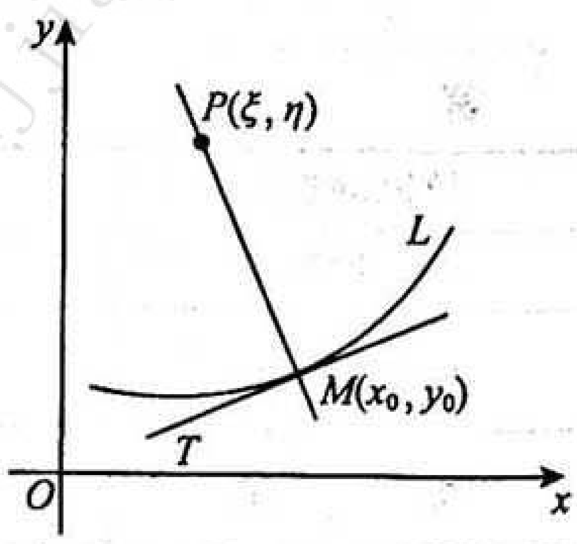


图 1—2—12

解 由题设
$$(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2},\qquad ①$$
又 $PM\perp MT$,所以
$$y_0'=-\frac{x_0-\xi}{y_0-\eta}.\qquad ②$$

由①,②式得$(y_0-\eta)^2=\dfrac{(1+y_0'^2)^2}{y_0''^2}$.由于$y''>0$,曲线$L$是凹的,故$y_0-\eta<0$,从而$y_0-\eta=-\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}$.

又$x_0-\xi=-y_0'(y_0-\eta)=\dfrac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''}$,于是得

$$\xi=x_0-\frac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''},\eta=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''}.$$

因此P点坐标为$\left(x_0-\dfrac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''},y_0+\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}\right)$.

129 [1998]　曲线$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$的渐近线方程为________.

答　应填$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

解　计算可得曲线不存在水平渐近线和铅直渐近线.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

故此曲线的渐近线方程为$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

130 [1999]　已知函数$y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$,求

(Ⅰ)函数的增减区间及极值;

(Ⅱ)函数图形的凹凸区间及拐点;

(Ⅲ)函数图形的渐近线.

解　所给函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,令$y'=0$,得驻点$x=0$及$x=3$. $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$,令$y''=0$,得$x=0$.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+	−	0	+
y''	−	0	+	+	+	+
y	↗	拐点	↗	↘	极小值	↗

由此可知:(Ⅰ)函数的单调增加区间为$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$,单调减少区间为$(1,3)$;极小值为$y\Big|_{x=3}=\dfrac{27}{4}$.

(Ⅱ)函数图形在区间$(-\infty,0)$内是凸的,在区间$(0,1)$,$(1,+\infty)$内是凹的,拐点为点$(0,0)$.

(Ⅲ)由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$知,$x=1$是函数图形的铅直渐近线.

又
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1,\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=2,$$

故$y=x+2$是函数图形的斜渐近线.

131 [2000]　曲线$y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线方程为________.

答 应填 $y=2x+1$.

解
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}[2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right]=1,$$

所以斜渐近线方程为 $y=2x+1$.

132 [2005] 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

答 应填 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

解 因为
$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{\frac{3}{2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+3x+3x^2}{\sqrt{x}[(1+x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}+3}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+1}=\frac{3}{2},$$

故斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

133 [2006] 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为________.

答 应填 $y=\dfrac{1}{5}$.

解 因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4\frac{\sin x}{x}}{5-2\frac{\cos x}{x}}=\frac{1}{5},$$

故曲线的水平渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{5}$.

134 [2007] 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

答 应选(D).

解
$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=+\infty$,所以沿 $x\to+\infty$ 方向没有水平渐近线. 又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\ln(1+e^x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln[e^x(e^{-x}+1)]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[x+\ln(e^{-x}+1)]=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-\ln e^x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=0,$$

所以沿 $x \to +\infty$ 方向有斜渐近线 $y=x$.

再看沿 $x \to -\infty$ 方向：

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0,$$

所以沿 $x \to -\infty$ 方向该曲线有水平渐近线 $y=0$. 既然沿 $x \to -\infty$ 方向已有水平渐近线，此曲线当然不可能再有斜渐近线. 故共有 3 条渐近线，应选(D).

135 [2010]　曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为________.

答　应填 $y=2x$.

解　由于函数 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 连续，所以曲线无铅直渐近线. 又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 都不存在，所以曲线无水平渐近线. 考虑到

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2, b=\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0,$$

所以曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 有斜渐近线 $y=2x$.

136 [2012]　曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

答　应选(C).

解　因为

$$y=\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)},$$

所以 $$\lim_{x\to-1}y=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}, \lim_{x\to1}y=\lim_{x\to1}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\infty,$$

故 $x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线，且是唯一的一条铅直渐近线.

因为

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1,$$

所以 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线.

综上可知，曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有 2 条渐近线.

137 [2012]　曲线 $y=x^2+x\ (x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________.

答　应填 $(-1,0)$.

解　将 $y'=2x+1, y''=2$ 代入曲率公式 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$，得

$$\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

整理后有

$$x^2+x=0,$$

由于 $x<0$，故取 $x=-1$，从而 $y\Big|_{x=-1}=0$，故所求点的坐标为 $(-1,0)$.

138 [2014]　下列曲线中有渐近线的是

(A) $y=x+\sin x$.　　(B) $y=x^2+\sin x$.　　(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　　(D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

答　应选(C).

解 对于 $y=x+\sin\frac{1}{x}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)=1$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，所以有斜渐近线 $y=x$，因此应选(C).

139 [2014] 曲线 $\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是

(A)$\frac{\sqrt{10}}{50}$.　　(B)$\frac{\sqrt{10}}{100}$.　　(C)$10\sqrt{10}$.　　(D)$5\sqrt{10}$.

答 应选(C).

解 曲线在点$(x,f(x))$处的曲率公式 $K=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$，曲率半径 $R=\frac{1}{K}$.

本题中$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t+4$，所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2t+4}{2t}=1+\frac{2}{t}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\frac{2}{t^2}}{2t}=-\frac{1}{t^3}$，对应于 $t=1$ 的点处有 $y'=3$，$y''=-1$，所以 $K=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\frac{1}{10\sqrt{10}}$，曲率半径 $R=\frac{1}{K}=10\sqrt{10}$. 应选(C).

140 [2016] 曲线 $y=\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为________.

答 应填 $y=x+\frac{\pi}{2}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\arctan(1+x^2)}{x}\right]=1=a,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{1+x^2}-x+\arctan(1+x^2)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}=b,$$

则斜渐近线方程为 $y=x+\frac{\pi}{2}$.

141 [2017] 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________.

答 应填 $y=x+2$.

解 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)=1=a,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2}{x}=2=b,$$

则斜渐近线为 $y=x+2$.

2.5 不等式的证明

考点点睛

证明不等式常用的方法有：

1. 利用函数的单调性

若 $f'(x)\geqslant0$ 且 $f(a)=0$，$x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\geqslant0$，$x\in[a,b]$.

2. 利用最值

若$[f(x)]_{\min}\geqslant0$，$x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\geqslant0$，$x\in[a,b]$.

3. 利用中值定理

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，对中值 ξ 放缩.

4. 利用泰勒公式

首先只能利用带拉格朗日余项的泰勒公式证明不等式，其次利用泰勒公式把握好展开点 x_0 与被展开点 x 是最关键的，展开点一般选取已知导数信息最多的点，包括隐含导数信息的点，如极值点等，被展开点一般试着把式子有利于向特征结论化简而选取，往往可以取端点、中间点等.

5. 利用曲线的凹凸性

142 [1990—Ⅲ] 证明：当 $x>0$ 时，有不等式 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

证 考虑函数 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}, x>0$，有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0, x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，知当 $x>0$ 时，$f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}>0$，即 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

143 [1991—Ⅲ] 利用导数证明：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

证 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$，则 $f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$，故在 $[1,+\infty)$ 内 $f(x)$ 为严格增函数. 又 $f(1)=2\ln 2>0$，所以有 $f(x)>0, x>1$. 从而得

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}, x>1.$$

144 [1992—Ⅲ] 设 $f''(x)<0, f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0, x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法 1 令 $F(x)=f(x)+f(x_2)-f(x+x_2)$，$F(0)=0$，又 $F'(x)=f'(x)-f'(x+x_2)=f''(\xi)(-x_2)>0$，$\xi\in(x,x+x_2)$（拉格朗日中值定理），故 $F(x_1)>F(0)=0, x_1>0$，即 $f(x_1)+f(x_2)-f(x_1+x_2)>0$.

证法 2 不妨设 $x_1\leqslant x_2$（$x_2\leqslant x_1$ 时类似可证），则由拉格朗日中值定理可得

$$f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1), 0<\xi_1<x_1,$$

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2), x_2<\xi_2<x_1+x_2,$$

又已知 $f''(x)<0$，故 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$. 比较以上两式即得

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

注 证法 1 采用把其中一个常量字母 x_1 改为变量 x（常数变量化）转化为函数不等式，再利用单调性的方法加以证明，是证明这类常数不等式常用的一种方法.

145 [1993—Ⅲ] 设 $x>0$，常数 $a>\mathrm{e}$. 证明：$(a+x)^a<a^{a+x}$.

证 由函数 $y=\ln x$ 的单调性，只需证 $a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$.

设 $f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续、可导，且

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{a+x}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增. 又 $f(0)=0$，从而得 $f(x)>0, x>0$，即

$$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a, x>0,$$

所以

$$(a+x)^a<a^{a+x}, x>0.$$

146 [1995—Ⅲ] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(1), f'(0), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$. (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$. (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

答 应选(B).

解 由于 $f''(x)>0, x\in[0,1]$,则 $f'(x)$ 单调增加.又 $f(1)-f(0)=f'(c), c\in(0,1)$,

从而
$$f'(1)>f'(c)>f'(0),$$
即
$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0).$$

147 [1995—Ⅲ] 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$,证明:$f(x)\geqslant x$.

证法1 因 $f(x)$ 连续且具有一阶导数,故由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0, f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 由 $f(x)$ 的泰勒公式得
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2, \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$
因 $f''(\xi)>0$,所以 $f(x)\geqslant x$.

证法2 易推知 $f(0)=0, f'(0)=1$,令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F'(x)=f'(x)-1, F''(x)=f''(x)>0$,有 $F'(0)=f'(0)-1=0$,则 $x=0$ 是唯一的极小值点,也是最小值点,于是 $F(x)=f(x)-x\geqslant F(0)=0$,证毕.

148 [1998] 设 $x\in(0,1)$,证明:

(Ⅰ) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

(Ⅱ) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

证 (Ⅰ)令 $\varphi(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$,有
$$\varphi(0)=0, \varphi'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,$$
还看不出在 $(0,1)$ 内 $\varphi'(x)$ 是否定号.为此,再计算 $\varphi'(0)=0$,
$$\varphi''(x)=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x],$$
再计算
$$\varphi''(0)=0, \varphi'''(x)=-\frac{2\ln(1+x)}{(1+x)^2}<0, x\in(0,1),$$
于是 $\varphi''(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减少,又 $\varphi''(0)=0$,所以在 $(0,1)$ 内 $\varphi''(x)<0$. 于是 $\varphi'(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减少,又 $\varphi'(0)=0$,故在 $(0,1)$ 内 $\varphi'(x)<0$. 因此 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减少,又 $\varphi(0)=0$,故在 $(0,1)$ 内 $\varphi(x)<0$. 证毕.

(Ⅱ)令 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]$,有
$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},$$
由(Ⅰ)知,当 $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)<0$,于是在 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 严格单调减少,$f(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$,故当 $x\in(0,1)$ 时,
$$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}>\frac{1}{\ln 2}-1,$$
不等式左边证毕.又
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2},$$
故当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$. 不等式右边证毕.

149 [2000] 设函数 $f(x), g(x)$ 是大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$. (B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$. (D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

答 应选(A).

解 看起来,选项眼花缭乱,其实仔细审题发现,(A),(B)两项是 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 (a,b) 内的值与两端点处

的值比较大小,(C),(D)两项是 $f(x)g(x)$ 在区间 (a,b) 内的值与两端点处的值比较大小.题干中含有某种形式的导数的不等式,就想到用单调性.题干中表述的是谁的导数呢?经验算,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$$

故应选(A).

150 [2000] 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=1$,且满足等式 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$.

(Ⅰ)求导数 $f'(x)$;

(Ⅱ)证明:当 $x\geqslant0$ 时,成立不等式:$\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant1$.

(Ⅰ)解 由题设知

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0,$$

上式两边对 x 求导,得

$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x).$$

设 $u=f'(x)$,则有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{x+2}{x+1}u,$$

解之得

$$f'(x)=u=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1},$$

由 $f(0)=1$ 及 $f'(0)+f(0)=0$,知 $f'(0)=-1$,从而 $C=-1$,

因此

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}.$$

(Ⅱ)证 当 $x\geqslant0$ 时,$f'(x)<0$,即 $f(x)$ 单调减少,又 $f(0)=1$,所以 $f(x)\leqslant f(0)=1$.

设 $\varphi(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}$,则

$$\varphi(0)=0,\varphi'(x)=f'(x)+\mathrm{e}^{-x}=\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{-x},$$

当 $x\geqslant0$ 时,$\varphi'(x)\geqslant0$.即 $\varphi(x)$ 单调增加,因而 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$.即有 $f(x)\geqslant\mathrm{e}^{-x}$.综上所述,当 $x\geqslant0$ 时,不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant1$ 成立.

151 [2001] 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数,$f'(x)$ 严格单调减少,且 $f(1)=f'(1)=1$,则

(A)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

(C)在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)<x$,在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)>x$.

(D)在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)>x$,在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)<x$.

答 应选(A).

解 由选项看出,题目是要确定 x 与 $f(x)$ 在所讨论区间内的大小关系,因此,构造辅助函数 $F(x)=f(x)-x$.由题目的条件知

$$F(1)=0,F'(1)=0,$$
$$F''(x)=f''(x)<0,x\in(1-\delta,1+\delta),$$

故 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,即 $F(1)=0$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内为极大值,从而

$$f(x)-x<0,x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta),$$

即(A)正确.

152 [2002] 设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

证 先证右边的不等式.

设
$$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}(x>a>0),$$
因为
$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{ax}-x-a}{2x\sqrt{ax}}=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$$
故当 $x>a$ 时,$\varphi(x)$ 单调减少,又 $\varphi(a)=0$,所以,当 $x>a$ 时,$\varphi(x)<\varphi(a)=0$,即
$$\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}},$$
特别地,当 $x=b>a$ 时,便有
$$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}},$$
即
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

其次证明左边的不等式.

设
$$f(x)=\ln x(x>a>0),$$
由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}.$$
由于 $0<a<\xi<b$,故
$$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b},$$
又由于 $a^2+b^2>2ab$,所以 $\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$,从而有
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

153 [2004] 设 $e<a<b<e^2$,证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证法 1 设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$,则
$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$
所以当 $x>e$ 时,$\varphi''(x)<0$,故 $\varphi'(x)$ 单调减少,从而当 $e<x<e^2$ 时,
$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$
即当 $e<x<e^2$ 时,$\varphi(x)$ 单调增加.

因此当 $e<a<b<e^2$ 时,
$$\varphi(b)>\varphi(a),$$
即
$$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a,$$
故
$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

证法 2 原不等式等价于:$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$,左端可看作函数 $f(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上的拉格朗日中值定理的形式,故 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=f'(\xi)=2\frac{\ln\xi}{\xi}$,$a<\xi<b$. 下面对 ξ 作估计:

令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x>e$ 时,$\varphi'(x)<0$,则 $\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调减少,故 $\varphi(\xi)>\varphi(e^2)=\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}$,所以 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$,即 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

154 [2006] 证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

证　设 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x, x\in[0,\pi]$，则

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi,$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0, x\in(0,\pi),$$

故 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少，从而

$$f'(x)>f'(\pi)=0, x\in(0,\pi),$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加，当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$f(b)>f(a),$$

即

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

155 [2012]　证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

证法 1　记 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$，则 $f(x)$ 为偶函数.

当 $0\leqslant x<1$ 时，$f'(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{x(1+x^2)}{1-x^2}-\sin x\geqslant\ln\dfrac{1+x}{1-x}+(x-\sin x)\geqslant 0$，因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)\geqslant 0(0\leqslant x<1)$.

由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)\geqslant 0(-1<x<1)$，即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1).$$

证法 2　记 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$，则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x, f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-1-\cos x.$$

当 $-1<x<1$ 时，由于 $\dfrac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4$，$1+\cos x\leqslant 2$，所以 $f''(x)\geqslant 2>0$，从而 $f'(x)$ 单调增加.

又因为 $f'(0)=0$，所以当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 中的最小值. 因为 $f(0)=0$，所以

$$f(x)\geqslant 0(-1<x<1)，即\ x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1).$$

证法 3　利用带有拉格朗日型余项的泰勒公式，得

$$x\ln(1+x)=x\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\theta_1x)^3}\right], 0<\theta_1<1,$$

$$x\ln(1-x)=x\left[-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3(1-\theta_2x)^3}\right], 0<\theta_2<1,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos\theta_3x}{4!}x^4, 0<\theta_3<1,$$

所以

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x=1+\frac{3}{2}x^2+\left[\frac{1}{3(1+\theta_1x)^3}+\frac{1}{3(1-\theta_2x)^3}+\frac{\cos\theta_3x}{4!}\right]x^4.$$

因为 $-1<x<1$，$0<\theta_i<1$，所以 $-1<\theta_ix<1(i=1,2,3)$，从而

$$\left[\frac{1}{3(1+\theta_1x)^3}+\frac{1}{3(1-\theta_2x)^3}+\frac{\cos\theta_3x}{4!}\right]x^4\geqslant 0,$$

所以

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{3}{2}x^2\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1).$$

156 [2016]　设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$. 若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内，有

(A) $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$.　　(B) $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$.

(C) $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$.　　(D) $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$.

答　应选(A).

解　由 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$，且 $f_i''(x)$ 连续知，在 x_0 某邻域内曲线 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$ 是凸的，又在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，如图 1—2—13 所示，有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x).$$

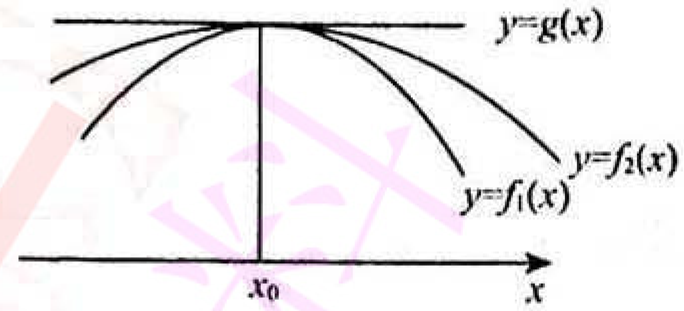


图 1—2—13

2.6　方程的根(零点问题)

考点点睛

1. 证明根的存在性的常用方法

(1)连续函数的零点定理(包括推广的零点定理).

(2)罗尔定理(包括推广的罗尔定理).

2. 证明根的唯一性的常用方法

(1)单调性.

(2)罗尔定理的推论.(若 $f^{(n)}(x)\neq 0$，则 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上至多只有 n 个根，$x\in[a,b]$)

有时也可利用反证法去说明.

157 [1989—Ⅲ]　若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$

(A)无实根.　　(B)有唯一实根.　　(C)有三个不同实根.　　(D)有五个不同实根.

答　应选(B).

解　由于 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 为 5 次方程，则该方程至少有一个实根(奇次方程至少有一实根).令 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，而

$$\Delta=(6a)^2-60b=12(3a^2-5b)<0,$$

则 $f'(x)\neq 0$.因此，原方程最多有一个实根，故原方程有唯一实根.

158 [1989—Ⅲ]　证明：方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

证　由于

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=2\sqrt{2}.$$

记 $F(x)=\frac{x}{e}-\ln x-2\sqrt{2}$，$F'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}$.又 $F(e)=-2\sqrt{2}<0$，

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty,$$

故由零点定理知，$F(x)$ 在 $(0,e)$，$(e,+\infty)$ 内分别至少有一个零点.

又当 $0<x<e$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调减少；当 $e<x<+\infty$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调增加，所以 $F(x)$ 在 $(0,e)$，$(e,+\infty)$ 内分别只有一个零点，所以原方程在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

159 [1993—Ⅲ]　设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为

(A)3.　　(B)2.　　(C)1.　　(D)0.

答　应选(B).

解　由 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 可知，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$.令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$，且当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 严格单调增加；而当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 严格单调减少，又 $f(e)=k>0$，而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{x}{e}+k\right)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{x}{e}+k\right)=-\infty.$$

则 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 上分别有唯一零点，故 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为 2.

160 [1994—Ⅲ] 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

解 设 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，则 $f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$.

①当 $k\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数. 又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & k<0,\\ -1, & k=0.\end{cases}$$

所以，当 $k\leqslant0$ 时，$f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上仅有一个解.

②当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$. $f''(x)>0$，所以 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ 为极小值点，且 $y=f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 内是凹的，所以，当极小值为零，即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=k\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{k}}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)^2}-1=0$$

时，原方程有且仅有一个解. 由上式解得 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

综上知，当 $k\leqslant0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，方程有且仅有一个解.

161 [1996—Ⅲ] 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$

(A)无实根. (B)有且仅有一个实根.

(C)有且仅有两个实根. (D)有无穷多个实根.

答 应选(C).

解 令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$，显然，$f(x)$ 是偶函数. 所以，只要考虑 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上的实根情况. 当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-\cos x$. $f(0)=-1<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>0$.

又 $f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x>0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调增加，因此 $f(x)=0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一实根，而当 $x\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$，故在 $(0,+\infty)$ 上方程 $f(x)=0$ 有且仅有唯一实根. 由对称性可知，$f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且仅有两个实根.

162 [1997] 就 k 的不同取值情况，确定方程 $x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数，并证明你的结论.

解 设 $f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上连续.

由 $f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x=0$，解得 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的唯一驻点 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$.

由于当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0]$ 上单调减少，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加. 因此 x_0 是 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的唯一最小值点，最小值为 $y_0=f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$，又因 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内 $f(x)$ 的取值范围为 $[y_0,0)$.

因此,当 $k\notin[y_0,0)$,即 $k<y_0$ 或 $k\geqslant 0$ 时,原方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内没有根;

当 $k=y_0$ 时,原方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 x_0;

当 $k\in(y_0,0)$ 时,原方程在 $(0,x_0)$ 和 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内各恰有一根,即原方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内恰有两个不同的根.

163 [1998] 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(Ⅰ)试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(Ⅱ)又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$,证明(Ⅰ)中的 x_0 是唯一的.

证 (Ⅰ)取 $\varphi(x)=-x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$,它在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,$\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 由罗尔定理知,存在 $x_0\in(0,1)$,使 $\varphi'(x_0)=0$. 经计算,

$$\varphi'(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

故存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$,得证.

(Ⅱ)由于

$$\varphi''(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)>0,$$

即 $\varphi'(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调增加,故(Ⅰ)中的 x_0 是唯一的.

注 本题实际上就是证明存在唯一的 $x_0\in(0,1)$ 使得 $x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t$. 有些读者可能首先想到使用零点定理证明根的存在性,即令 $F(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(0)=-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,$F(1)=f(1)$,这样如果 $f(x)$ 恒等于 0,则结论显然成立,如果 $f(x)$ 不恒等于 0,则有 $F(0)=-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t<0$,但 $F(1)=f(1)\geqslant 0$,无法说清楚 $F(1)=f(1)>0$,所以这里使用零点定理遇到阻碍. 当我们用零点定理不容易直接说明方程有根时,可退一步对它的"原函数"使用罗尔定理来说明方程有根(这也是考点点睛中写到的两种常用的证明方程根存在的方法,读者一定要深刻理解),故转而思考:$x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$ 所对应的一个辅助函数是谁呢?实际上 $x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow f(x_0)-\frac{1}{x_0}\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$,$x_0\in(0,1)$,故 $F(x)=-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\cdot e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=-x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.(本题构造辅助函数的公式请参考《张宇高等数学 18 讲》第 5 讲"例题精解 2")

164 [2003] 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

解法 1 问题等价于讨论方程 $\ln^4 x-4\ln x+4x-k=0$ 有几个不同的实根.

设

$$\varphi(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-k,x>0,$$

则有

$$\varphi'(x)=\frac{4(\ln^3 x-1+x)}{x}.$$

不难看出,$x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点.

当 $0<x<1$ 时,$\varphi'(x)<0$,即 $\varphi(x)$ 单调减少;当 $x>1$ 时,$\varphi'(x)>0$,即 $\varphi(x)$ 单调增加,故 $\varphi(1)=4-k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值.

当 $k<4$,即 $4-k>0$ 时,$\varphi(x)=0$ 无实根,即两条曲线无交点;

当 $k=4$,即 $4-k=0$ 时,$\varphi(x)=0$ 有唯一实根,即两条曲线只有一个交点;

当 $k>4$,即 $4-k<0$ 时,由于

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}[(\ln^3 x-4)\ln x+4x-k]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}[(\ln^3 x-4)\ln x+4x-k]=+\infty,$$

故 $\varphi(x)=0$ 有两个实根，分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内，即两条曲线有两个交点。

解法 2 问题等价于讨论方程 $k=4x-4\ln x+\ln^4 x$ 的不同实根的个数。

设 $f(x)=4x-4\ln x+\ln^4 x(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{4(x-1+\ln^3 x)}{x}$，不难看出 $x=1$ 是 $f(x)$ 的驻点。又 $f''(x)=\dfrac{4(1+3\ln^2 x-\ln^3 x)}{x^2}$，$f''(1)>0$，所以 $f(1)=4$ 为 $f(x)$ 的最小值。

当 $k<4$ 时，方程 $f(x)=k$ 无实根，即两曲线无交点；

当 $k=4$ 时，方程 $f(x)=k$ 有唯一实根，即两曲线只有一个交点；

当 $k>4$ 时，由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

所以方程 $f(x)=k$ 有两个实根，分别位于区间 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内，即两曲线有两个交点。

165 [2008] 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

答 应选(D).

解 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上满足罗尔中值定理的条件，故 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内至少各有一个零点，从而否定(A)和(B)，又 $f'(x)$ 中含有因子 x，故 $x=0$ 也是 $f'(x)$ 的零点，于是选(D).

也可以直接计算：

$$f(x)=x^4-3x^3+2x^2,\ f'(x)=x(4x^2-9x+4).$$

显然，$f'(x)$ 有 3 个零点。

166 [2009] 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内

(A)有极值点，无零点. (B)无极值点，有零点.

(C)有极值点，有零点. (D)无极值点，无零点.

答 应选(B).

解 在 $x^2+y^2=2$ 两边对 x 求一阶导数

$$x+yy'=0,\text{解得 } y'(1)=-1,$$

再求导

$$1+(y')^2+yy''=0,\text{解得 } y''(1)=-2.$$

由上面的分析知：$f'(1)=-1, f''(1)=-2$.

因为 $f''(x)$ 不变号，所以在区间 $[1,2]$ 上 $f''(x)<0$，$f'(x)$ 是单调减少的，即 $f'(x)<f'(1)=-1<0$，从而函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调减少，无极值点。这就排除了选项(A)和(C).

在区间 $[1,2]$ 上函数 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，故有

$$f(2)-f(1)=f'(\xi)<-1,\xi\in(1,2),$$

从而 $f(2)<0$，而 $f(1)=1>0$，故由零点定理知 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有零点，即选项(B)是正确的。

167 [2011] 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

答 应选(C).

解

$$f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|,$$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-12x+11=0$，由于其判别式 $\Delta=(-12)^2-4\times3\times11>0$，所以 $f'(x)=0$ 有 2 个实根，即 $f(x)$ 有 2 个驻点，因此选(C).

168 [2015] 已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$，求 $f(x)$ 零点的个数。

解 $f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加.

因为 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上存在唯一零点.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上存在唯一零点.

综上可知，$f(x)$ 有且仅有两个零点.

169 [2017] 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(Ⅰ)方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Ⅱ)方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

证 (Ⅰ)由题设知 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ 存在，所以 $f(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$ 与极限的保号性可知，存在 $a\in(0,1)$ 使得 $\frac{f(a)}{a}<0$，即 $f(a)<0$.

又 $f(1)>0$，所以存在 $b\in(a,1)\subset(0,1)$，使得 $f(b)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $f(0)=f(b)=0$，根据罗尔定理知，存在 $c\in(0,b)\subset(0,1)$，使得

$$f'(c)=0.$$

令 $F(x)=f(x)f'(x)$，由题设知 $F(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上可导，且

$$F(0)=0,F(c)=0,F(b)=0.$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,b)$，使得 $F'(\xi)=F'(\eta)=0$，即 ξ,η 是方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的两个不同实根，得证.

2.7 有关微分中值定理的证明题

170 [1996－Ⅲ] 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

证 不妨设 $f'(a)>0$，则 $f'(b)>0$，则

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

则当 $x\to a$ 时，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，存在 $x_1\in(a,a+\delta_1)$，使得 $f(x_1)>0(\delta_1>0)$.

同理可知存在 $x_2\in(b-\delta_2,b)$，使得 $f(x_2)<0(\delta_2>0)$.

由连续函数的零点定理，得存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

由 $f(a)=f(\xi)=f(b)=0$，运用罗尔定理，知存在 $\eta_1\in(a,\xi)$ 及 $\eta_2\in(\xi,b)$，分别使得 $f'(\eta_1)=0$，$f'(\eta_2)=0$；再用一次罗尔定理，知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\eta)=0$.

171 [1999] 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

证 由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,1]$.

分别令 $x=-1$ 和 $x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),-1<\eta_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),0<\eta_2<1.$$

两式相减，可得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由 $f'''(x)$ 的连续性知，$f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设它们分别为 M 和 m，则有

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\leqslant M.$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$$

注　在使用泰勒公式证明中值问题时，把握好展开点 x_0 与被展开点 x 是最关键的，展开点一般选取已知导数信息最多的点，包括隐含导数信息的点，如极值点等，被展开点一般试着把式子有利于待证结论化简而选取，往往可以取端点、中间点等.

172 [2001]　设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$.

(Ⅰ)写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(Ⅱ)证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

(Ⅰ)解　对任意 $x\in[-a,a]$，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2.$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

(Ⅱ)证

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2!}f''(\xi)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x.$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故对任意的 $x\in[-a,a]$，有 $m\leqslant f''(x)\leqslant M$，其中 M,m 分别为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最大、最小值，所以有

$$m\int_0^a x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^a x^2\mathrm{d}x,$$

即

$$m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

由 $f''(x)$ 的连续性知，至少存在一点 $\eta\in[-a,a]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

注　本题第二问有部分考生这样处理：$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left[f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2\right]\mathrm{d}x=0+\frac{f''(\xi)}{2}\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}a^3f''(\xi)$，于是便得出结论. 这是一种经典的错误，原因在于中值 ξ 是依赖于 x 的，从而导致 $f''(\xi)$ 并不是常数（与 x 有关），故积分中不可以直接提出去.

173 [2003]　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

(Ⅰ)在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

(Ⅱ)在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$；

(Ⅲ)在 (a,b) 内存在与(Ⅱ)中 ξ 相异的点 η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证法 1　(Ⅰ)因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $f(a)=0$.

又$f'(x)>0$知$f(x)$在(a,b)内单调增加,故

$$f(x)>f(a)=0,x\in(a,b).$$

(Ⅱ)设 $F(x)=x^2,g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $g'(x)=f(x)>0(x\in(a,b))$,故 $F(x),g(x)$ 满足柯西中值定理的条件,于是在(a,b) 内存在点 ξ 使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^a f(t)\mathrm{d}t}=\frac{(x^2)'}{\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'}\Bigg|_{x=\xi},$$

即

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(Ⅲ)因 $f(\xi)=f(\xi)-0=f(\xi)-f(a)$,在$[a,\xi]$上应用拉格朗日中值定理,知在$(a,\xi)$ 内存在一点 η,使$f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$,从而由(Ⅱ)的结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

即有

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 2 (Ⅰ)同证法 1.

(Ⅱ)设

$$F(x)=x^2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b^2-a^2)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

显然 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b) 内可导,

$$F(b)=b^2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b^2-a^2)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=a^2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

$$F(a)=a^2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b^2-a^2)\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=a^2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

根据罗尔中值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $2\xi\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=(b^2-a^2)f(\xi)$,则

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(Ⅲ)由(Ⅰ)和(Ⅱ)可知

$$F'(x)=2x\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b^2-a^2)f(x),$$

则

$$F'(\xi)-F'(a)=2(\xi-a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b^2-a^2)f(\xi).$$

根据拉格朗日中值定理,存在 $\eta\in(a,\xi)\subset(a,b)$,使得

$$F''(\eta)=\frac{F'(\xi)-F'(a)}{\xi-a}=2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\frac{b^2-a^2}{\xi-a}f(\xi),\text{又 }F''(\eta)=2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b^2-a^2)f'(\eta),$$

则联合(Ⅱ)的结论有 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

注 本题主要考查柯西中值定理和拉格朗日中值定理.

174 [2005] 已知函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

证 (Ⅰ)令 $g(x)=f(x)+x-1$,则 $g(x)$在$[0,1]$上连续,且

$$g(0)=-1<0,g(1)=1>0,$$

根据连续函数的零点定理知,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$,即 $f(\xi)=1-\xi$.

(Ⅱ)由于函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,所以根据拉格朗日中值定理,存在 $\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$,$\zeta\in(\xi,1)\subset(0,1)$,使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi},$$

从而
$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

175［2007］　设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证　令 $h(x)=f(x)-g(x)$，假设不存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $h(\eta)=0$. 则对任一 $x\in(a,b)$，$h(x)$ 恒大于 0，或恒小于 0，不妨设 $h(x)>0$，设函数 $g(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取得最大值，则 $h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)>0$. 即 $f(x_0)>g(x_0)$. 这与题设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值矛盾. 故存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $h(\eta)=0$.

因此由罗尔中值定理可知，存在 $\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$，使得
$$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0.$$
再由罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $h''(\xi)=0$. 即
$$f''(\xi)=g''(\xi).$$

176［2009］　（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

证　（Ⅰ）取
$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$
由题意知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且
$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$
根据罗尔中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得
$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$
即
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$
（Ⅱ）根据拉格朗日中值定理，得
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(\xi)x}{x}=\lim_{x\to0^+}f'(\xi),$$
其中 $0<\xi<x$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(\xi)=A$，故 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

注　(1)第二问还可以用洛必达法则来证明：
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}f'(x)=A.$$
(2)本题更一般的结论为：设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$（存在），则 $f'(x_0)=A$. 同时也得到 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的结论.

177［2010］　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=\frac{1}{3}$.

证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

证　设函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，由题意知 $F(0)=0,F(1)=0$.

在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=F'(\xi)\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}[f'(\xi)-\xi^2],\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=F'(\eta)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}[f'(\eta)-\eta^2],\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

两式相加,得

$$F(1)-F(0)=\frac{1}{2}[f'(\xi)-\xi^2]+\frac{1}{2}[f'(\eta)-\eta^2]=0,$$

即

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

注

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2\Leftrightarrow f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'\Big|_{x=\xi}+\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'\Big|_{x=\eta}=0,\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

178 [2013] 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(Ⅰ)证法 1 因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(0)=0$. 又因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导,且 $f(1)=1$,所以由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f'(\xi)=f(1)-f(0)=1.$$

证法 2 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(0)=f(0)=0$, $F(1)=f(1)-1=0$,由罗尔定理,知存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=1$.

(Ⅱ)证法 1 因为 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的奇函数且有二阶导数,所以 $f'(x)$ 是偶函数,故

$$f'(-\xi)=f'(\xi)=1.$$

令 $F(x)=[f'(x)-1]e^x$,则函数 $F(x)$ 可导,且 $F(-\xi)=F(\xi)=0$.

根据罗尔中值定理,存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$,使得 $F'(\eta)=0$. 因为

$$F'(\eta)=[f''(\eta)+f'(\eta)-1]e^{\eta}\text{ 且 }e^{\eta}\neq0,$$

所以

$$f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

证法 2 因为 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的奇函数且有二阶导数,所以 $f'(x)$ 是偶函数.

令 $F(x)=f'(x)+f(x)-x$,则函数 $F(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上可导,且

$$F(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1),$$

$$F(-1)=f'(-1)+f(-1)+1=f'(1)-f(1)+1=f'(1),$$

根据罗尔中值定理,存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $F'(\eta)=0$.

由 $F'(x)=f''(x)+f'(x)-1$,知

$$f''(\eta)+f'(\eta)-1=0,\text{即 }f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

证法 3 因为 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的奇函数且有二阶导数,所以 $f'(x)$ 是偶函数,$f''(x)$ 是奇函数.

由(Ⅰ)知,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$.

令 $F(x)=f''(x)+f'(x)-1$,则

$$F(\xi)=f''(\xi)+f'(\xi)-1=f''(\xi),$$

$$F(-\xi)=f''(-\xi)+f'(-\xi)-1=-f''(\xi)+f'(\xi)-1=-f''(\xi).$$

当 $f''(\xi)=0$ 时,$f''(\xi)+f'(\xi)-1=0$,即 $f''(\xi)+f'(\xi)=1$. 结论得证.

当 $f''(\xi)\neq0$ 时,$F(\xi)F(-\xi)=-[f''(\xi)]^2<0$. 由于 $F(x)=[f'(x)+f(x)-x]'$,根据导函数的介值性质,存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$,使得

$$F(\eta)=0,\text{即 }f''(\eta)+f'(\eta)-1=0,$$

故

$$f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

2.8 拉格朗日中值定理及带拉格朗日余项的泰勒公式的有关问题

179 [1996-Ⅲ] 设 $f(x)$ 处处可导,则

(A)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

答 应选(D).

解法1 排除法. 令 $f(x)=x$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，但 $f'(x)=1$，可见(A)，(C)都不正确.

令 $f(x)=e^{-x}$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=-\infty$，但 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$，故(B)也不正确.

所以应选(D).

解法2 直接法. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，则存在 $M>0$ 及 $x_0>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>M$，于是当$x>x_0$时有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)>M(x-x_0),$$

即

$$f(x)>f(x_0)+M(x-x_0)\to+\infty(x\to+\infty).$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故应选(D).

180 [1996－Ⅲ] 求函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$在点 $x=0$ 处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

解 因为 $f^{(k)}(x)=\left(\dfrac{2}{1+x}-1\right)^{(k)}=\dfrac{(-1)^k2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$，$k=1,2,\cdots,n+1$，

所以
$$f(x)=1-2x+2x^2+\cdots+(-1)^n2x^n+(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},0<\theta<1.$$

181 [2002] 设函数 $y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，则

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C)当$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D)当$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

答 应选(B).

解法1 直接法. $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 之间，则 $f(x)=f'(\xi)(x-x_0)+f(x_0)=f'(\xi)x+f(x_0)-f'(\xi)x_0$，当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\neq0$，则据 $f(x)=f'(\xi)x+f(x_0)-f'(\xi)x_0$，知 $x\to+\infty$时，$f(x)\to\infty$，这与 $f(x)$是有界的矛盾.

故当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 选(B).

解法2 排除法. (A)的反例：$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有界，

$$f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2},$$

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导. 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cos x^2-\dfrac{\sin x^2}{x^2}\right)$不存在.

(C)的反例：$f(x)=\sin x$，$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界，可导，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. 但$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1\neq0$.

(D)的反例：$f(x)=\cos\sqrt{x}$，$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界，$f'(x)=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=-\dfrac{1}{2}$，但并不为零.

因为四个选项中有且只有一个正确，所以选(B).

182 [2007] 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是

(A)若 $u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.

(B)若 $u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必发散.

(C)若 $u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.

(D)若 $u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必发散.

答 应选(D).

解 排除法.取 $f(x)=\frac{1}{x}$,在 $(0,+\infty)$ 内满足题设条件,$u_1=1>\frac{1}{2}=u_2$,$\{u_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是收敛的;取 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,在 $(0,+\infty)$ 内满足题设条件,$u_1=0>-1=u_2$,$\{u_n\}=\{\log_{\frac{1}{2}}n\}$ 是发散的,故排除(B)和(A).取 $f(x)=x^2$,在 $(0,+\infty)$ 内满足题设条件,$u_1=1<4=u_2$,$\{u_n\}=\{n^2\}$ 是发散的,故排除(C).于是应选(D).

183 [2015] 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数,$f(a)=0$,$f'(x)>0$,$f''(x)>0$.设 $b>a$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$,证明 $a<x_0<b$.

证 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线方程是 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$,解得切线与 x 轴交点的横坐标

$$x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

由于 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 单调增加.由 $b>a$ 可知 $f(b)>f(a)=0$.

又 $f'(b)>0$,故 $\frac{f(b)}{f'(b)}>0$,即有 $x_0<b$.

$$x_0-a=b-\frac{f(b)}{f'(b)}-a=\frac{(b-a)f'(b)-f(b)}{f'(b)}.$$

由拉格朗日中值定理得

$$f(b)=f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b.$$

因为 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$ 单调增加,从而 $f'(\xi)<f'(b)$,故 $f(b)<(b-a)f'(b)$.由此可知 $x_0-a>0$,即 $x_0>a$.

综上,$a<x_0<b$.

第 3 章　一元函数积分学

考点分布

年份 / 分值 / 考点		87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
不定积分的计算		10		4	8	5	8	6	8	5	13	8	3	6	5	6	
定积分的计算		12	4	17	3	14	14	5	8	8	8			3		3	
反常积分						3	3	5				3	6	6	3		3
变限积分		3	11	3	12	3	12	6	3	8		11	8	3	19	7	10
定积分应用	几何	18	4	13	9	9	12	9	14	8	11	7	11	4	8	7	
	物理					6								7			7
定积分性质及积分中值定理		3	12		3			9	9				8	7	6	8	3

1987—2002 年

年份 / 分值 / 考点		03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（87—17 年）
不定积分的计算				4	10			10							4		123
定积分的计算		13	4	15			13	4			4						152
反常积分			4		4			4	4	4		4	4	4	4	4	72
变限积分		19	15	22	8	14		4				8		4	10		223
定积分应用	几何	4	12		12	11			14	4	12	25	11	10	11		270
	物理									11			4				35
定积分性质及积分中值定理		4					11		10	4	4		10		11	8	130

2003—2017 年

3.1 定积分的概念与性质

考点点睛

1. 定积分的概念

主要用于求 n 项和的数列的极限，见第 1 章.

2. 定积分的性质

(1)不等式性质：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且非负，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$；

若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geqslant g(x)$ 且 $f(x)\not\equiv g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

特别地：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

(2)等式性质：

若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可积，则对任意 c 有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$，$\xi\in[a,b]$.

1 [1987－Ⅲ] 积分中值定理的条件是________，结论是________.

答 应填 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

解 积分中值定理：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

2 [1988－Ⅲ] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有

(A) $f(-x)>g(-x)$.　　(B) $f'(x)<g'(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.　　(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

答 应选(C).

解 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导，则必在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\ \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$

又 $f(x)<g(x)$，从而 $f(x_0)<g(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

注 选项(D)中上限 x 有可能是负数，故错误.

3 [1989－Ⅲ] 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________.

答 应填 $x-1$.

解法 1 令 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=a$，则 $f(x)=x+2a$. 将 $f(x)=x+2a$ 代入 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=a$，得

$$\int_0^1 (t+2a)\mathrm{d}t=a，即\frac{1}{2}+2a=a.$$

由此可得
$$a=-\frac{1}{2},$$

则
$$f(x)=x-1.$$

解法 2 等式 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 两端从 0 到 1 对 x 积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

由此可得
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2},$$

从而
$$f(x)=x-1.$$

注 注意到定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一个数,由此可衍生出有关二重积分的此类问题.$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$也是一个数.

4 [1990—Ⅲ] 下列两个积分的大小关系是:$\int_{-2}^{-1} e^{-x^3}\mathrm{d}x$ ______ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3}\mathrm{d}x$.

答 应填>.

解 当$x\in[-2,-1]$时,$e^{-x^3}>e^{x^3}$,则$\int_{-2}^{-1} e^{-x^3}\mathrm{d}x>\int_{-2}^{-1} e^{x^3}\mathrm{d}x$.

5 [1994—Ⅲ] 设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$,$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$,则有

(A)$N<P<M$. (B)$M<P<N$. (C)$N<M<P$. (D)$P<M<N$.

答 应选(D).

解 由被积函数的奇偶性可知

$$M=0,N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0,P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0,$$

因此,$P<M<N$. 故应选(D).

6 [1997] 设在区间$[a,b]$上函数$f(x)>0$,$f'(x)<0$,$f''(x)>0$. 令$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则

(A)$S_1<S_2<S_3$. (B)$S_2<S_1<S_3$.

(C)$S_3<S_1<S_2$. (D)$S_2<S_3<S_1$.

答 应选(B).

解 由题目对函数$f(x)$图形形态的描述,易知$f(x)$在x轴上方、单调下降且是凹的,如图1—3—1所示,S_1是曲边梯形$ABCD$的面积,S_2是长方形A_1BCD的面积,S_3是梯形$ABCD$的面积,显然$S_2<S_1<S_3$.

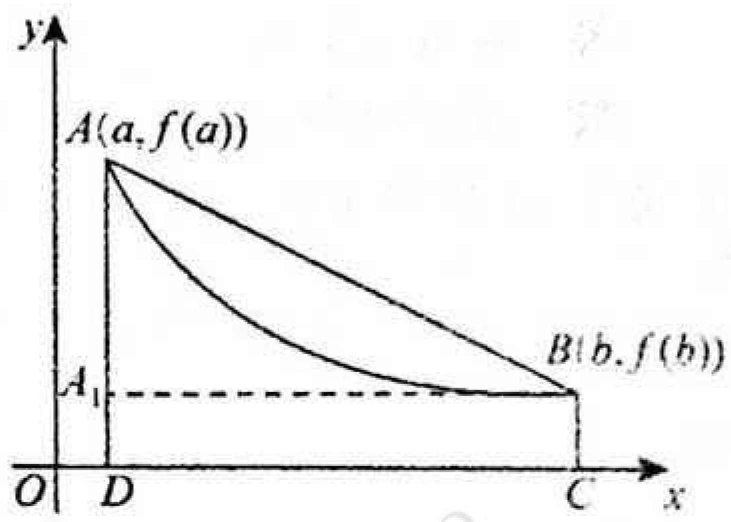


图 1—3—1

7 [1997] 设$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$,则$F(x)$

(A)为正常数. (B)为负常数. (C)恒为零. (D)不为常数.

答 应选(A).

解 由于函数$e^{\sin t}\sin t$以2π为周期,因此

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t\ (\text{为常数})$$
$$=-\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\mathrm{d}(\cos t)=0+\int_0^{2\pi}\cos^2 t e^{\sin t}\mathrm{d}t>0.$$

8 [2003] 设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$,$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$,则

(A)$I_1>I_2>1$. (B)$1>I_1>I_2$. (C)$I_2>I_1>1$. (D)$1>I_2>I_1$.

答 应选(B).

解 因为当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,$\sin x<x<\tan x$,故$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\tan x}$,则

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x=I_2.$$

这便排除了选项(C)和(D).

又令 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{x\sec^2x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2x}>0$,即 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调增加,有

$$\frac{\tan x}{x}\leqslant\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi},$$

故
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x<\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=1,$$

即选项(B) 正确.

注 从几何上更容易直接看出当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,$\tan x\leqslant\frac{4}{\pi}x$($y=\frac{4}{\pi}x$ 是过原点与点$\left(1,\frac{4}{\pi}\right)$的直线).

9 **[2007]** 如图 1—3—2,连续函数 $y=f(x)$在区间$[-3,-2]$,$[2,3]$上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$上的图形分别为直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则下列结论正确的是

(A)$F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.

(B)$F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C)$F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.

(D)$F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

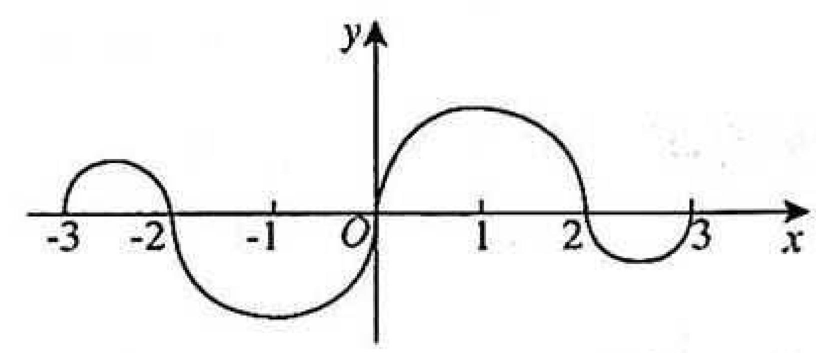


图 1—3—2

答 应选(C).

解 由所给条件,$f(x)$为 x 的奇函数,故 $F(x)$为 x 的偶函数,所以 $F(-3)=F(3)$. 再利用定积分的几何意义,用半圆面积表示所要计算的定积分,于是有

$$F(3)=\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi,F(2)=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

所以 $F(3)=\frac{3}{4}F(2)$,选(C).

10 **[2008]** 如图 1—3—3,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于

(A)曲边梯形 $ABOD$ 的面积.
(B)梯形 $ABOD$ 的面积.
(C)曲边三角形 ACD 的面积.
(D)三角形 ACD 的面积.

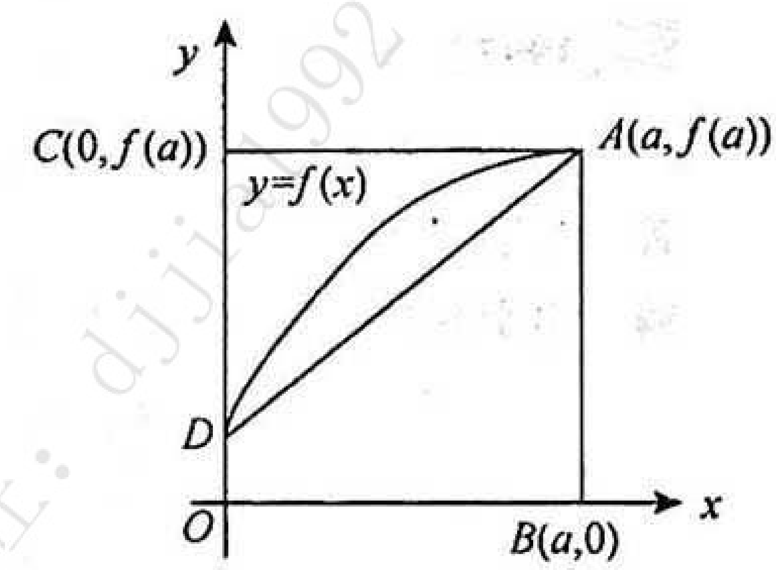


图 1—3—3

答 应选(C).

解
$$\begin{aligned}\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x&=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)\\&=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\\&=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

11 [2011] 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$. (B) $I<K<J$. (C) $J<I<K$. (D) $K<J<I$.

答 应选(B).

解 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<\sin x<\cos x<1<\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，且 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，于是有，$\ln(\sin x)<\ln(\cos x)<\ln(\cot x), x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，从而有，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$，选(B).

注 虽然 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$ 与 $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$ 是两个反常积分，但本题的考查方式并不需要考生判断其敛散性，因此反常积分敛散性的判断并不是本题的考点.

12 [2012] 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$，则有

(A) $I_1<I_2<I_3$. (B) $I_3<I_2<I_1$. (C) $I_2<I_3<I_1$. (D) $I_2<I_1<I_3$.

答 应选(D).

解 对定积分 $I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x, I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x, I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$

两两进行比较.

$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，因为在 $(\pi,2\pi)$ 内 $e^{x^2}\sin x<0$，所以 $I_2-I_1<0$，即有 $I_2<I_1$.

$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，因为在 $(2\pi,3\pi)$ 内 $e^{x^2}\sin x>0$，所以 $I_2<I_3$.

$$I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\xlongequal{设x=2\pi+t}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}e^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{0}e^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t(\text{第 2 个积分中设 }t=-u)$$

$$=\int_0^{\pi}e^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}e^{(2\pi-u)^2}\sin u\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}\left[e^{(2\pi+u)^2}-e^{(2\pi-u)^2}\right]\sin u\mathrm{d}u>0,\text{故 }I_3>I_1.$$

综上，有 $I_2<I_1<I_3$，故选(D).

注 以上是用解析的方法得出选(D)的结论. 其实本题也可以这样做：先画出 $y=e^{x^2}$ 及 $y=\sin x$ 在 $[0,3\pi]$ 上的草图，即可得到函数 $y=e^{x^2}\sin x$ 图形的大致形状，然后结合定积分的几何意义，即可判断出

$$I_2<I_1<I_3.$$

13 [2017] 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则

(A) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>0$. (B) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$.

(C) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. (D) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

答 应选(B).

解法 1 直接法.

由题设知曲线 $y=f(x)$ 过点 $A(-1,1), B(0,-1)$ 和 $C(1,1)$ 且是凹的(如图 1—3—4)，连接 AB 和 BC，得两条线段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$，设这两条线段对应的函数为 $y=g(x)$，由于 $y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是凹的，则

$$f(x)\leqslant g(x), x\in[-1,1],$$

则 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x$($f(x)$ 与 $g(x)$ 只有三个交点，故取不到等号).

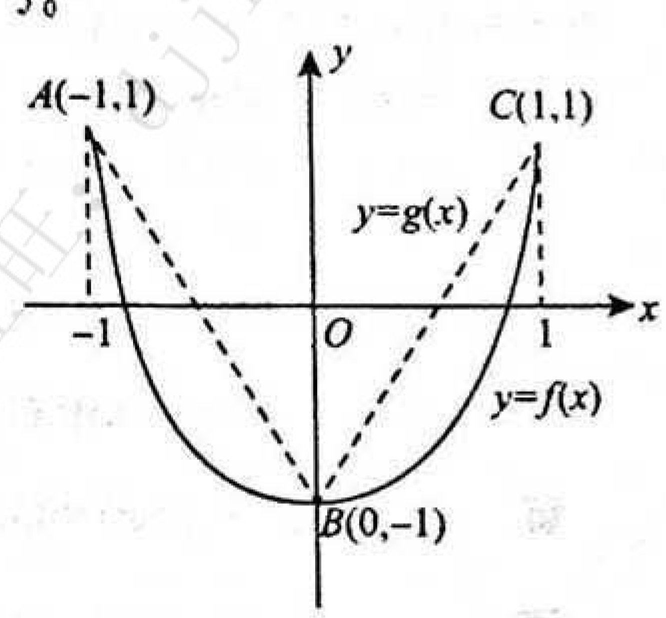


图 1—3—4

由定积分几何意义知

$$\int_{-1}^{0} g(x)\mathrm{d}x=0,\int_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x=0,$$

则$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x=0$.故应选(B).

解法 2 排除法.

取$f(x)=2x^2-1$,显然符合题设条件,由于$f(x)$是偶函数,则$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$,则(C),(D)都不正确.又

$$\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x=2\left(\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1-1\right)=-\frac{2}{3}<0,$$

则(A)不正确,故应选(B).

14 [2017] 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处. 如图 1—3—5,实线表示甲的速度曲线$v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线$v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为t_0(单位:s),则

(A)$t_0=10$. (B)$15<t_0<20$.

(C)$t_0=25$. (D)$t_0>25$.

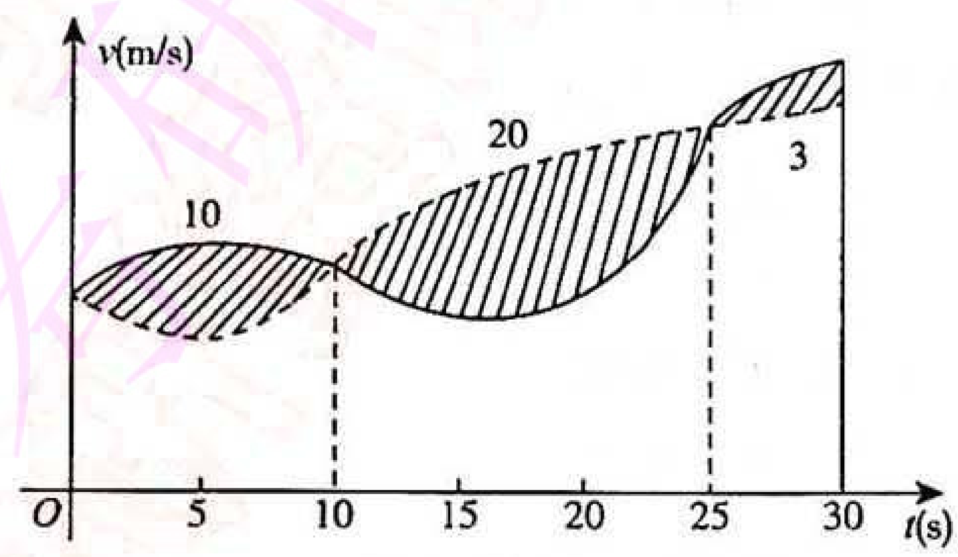


图 1—3—5

答 应选(C).

解 由题设知,从$t=0$到$t=t_0$时刻甲、乙的位移分别为

$$S_1=\int_{0}^{t_0} v_1(t)\mathrm{d}t,S_2=\int_{0}^{t_0} v_2(t)\mathrm{d}t,$$

其中S_1在几何上表示曲线$v=v_1(t)$,$t=t_0$及两坐标轴围成的面积,S_2在几何上表示曲线$v=v_2(t)$,$t=t_0$及两坐标轴围成的面积. 若t_0为计时开始后乙追上甲的时刻,则

$$S_2=S_1+10,$$

即

$$\int_{0}^{t_0} v_2(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{t_0} v_1(t)\mathrm{d}t+10,$$

$$\int_{0}^{t_0}[v_2(t)-v_1(t)]\mathrm{d}t=10.$$

由题中图形可知$t_0=25$,故应选(C).

3.2 不定积分的计算

考点点睛

对于不定积分的计算要熟练掌握三种基本方法:凑微分法,换元法与分部积分法,考题往往是凑微分法与分部积分法或者换元法与分部积分法甚至是需要三种方法都结合起来,本部分不应该过于钻研技巧性强的偏题与难题.

15 [1987—Ⅲ] $\int f'(x)\mathrm{d}x=$________.

答 应填$f(x)+C$,其中C为任意常数.

解 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$,其中$C$为任意常数.

16 [1987—Ⅲ] 计算不定积分$\int \frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x$,其中$a,b$是不全为 0 的非负数.

解 当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时，

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\int\frac{1}{a^2\tan^2x+b^2}d(\tan x)=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C;$$

当 $a=0,b\neq 0$ 时，

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\frac{1}{b^2}\tan x+C;$$

当 $a\neq 0,b=0$ 时，

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\frac{1}{a^2}\cot x+C,$$

其中 C 为任意常数.

17 [1989－Ⅲ] 求 $\int\frac{dx}{x\ln^2x}$.

解 $\int\frac{dx}{x\ln^2x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}+C$，其中 C 为任意常数.

18 [1990－Ⅲ] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $d\left[\int f(x)dx\right]$ 等于

(A) $f(x)$. (B) $f(x)dx$. (C) $f(x)+C$. (D) $f'(x)dx$.

答 应选(B).

解 $d\left[\int f(x)dx\right]=\left[\int f(x)dx\right]'dx=f(x)dx$.

注 本题主要考查不定积分的性质.

19 [1990－Ⅲ] 计算 $\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

解
$$\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx=\frac{\ln x}{1-x}-\int\frac{dx}{x(1-x)}=\frac{\ln x}{1-x}-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$
$$=\frac{\ln x}{1-x}+\ln\frac{|1-x|}{x}+C\text{，其中 }C\text{ 为任意常数.}$$

20 [1991－Ⅲ] 求 $\int x\sin^2x dx$.

解 原式 $=\int x\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{4}\int xd(\sin 2x)$

$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2xdx=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$，其中 C 为任意常数.

21 [1992－Ⅲ] 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为

(A) $1+\sin x$. (B) $1-\sin x$. (C) $1+\cos x$. (D) $1-\cos x$.

答 应选(B).

解 由题设可知 $f'(x)=\sin x$，于是 $f(x)=\int f'(x)dx=-\cos x+C_1$.

从而 $f(x)$ 的原函数

$F(x)=\int f(x)dx=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

令 $C_1=0,C_2=1$，即得 $f(x)$ 的一个原函数为 $1-\sin x$.

注 本题主要考查原函数的概念.

22 [1992－Ⅲ] 求 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 原式 $=\int\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)d(1+x^2)$

$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$，其中 C 为任意常数.

23 [1993—Ⅲ] $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$______.

答 应填$\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$,其中$C$为任意常数.

解 $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int \frac{\sin x}{(\cos x)^{3/2}}dx=-\int \frac{d(\cos x)}{(\cos x)^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$,其中$C$为任意常数.

24 [1993—Ⅲ] 已知曲线$y=f(x)$过点$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,且其上任一点$(x,y)$处的切线斜率为$x\ln(1+x^2)$,则$f(x)=$______.

答 应填$\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$.

解 由题设可知$y'=x\ln(1+x^2)$,则

$$y=\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\int xdx=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C.$$

又曲线$y=f(x)$过点$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,即$y(0)=-\frac{1}{2}$,代入上式得$C=-\frac{1}{2}$.

故
$$f(x)=y=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1].$$

25 [1994—Ⅲ] $\int x^3e^{x^2}dx=$______.

答 应填$\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$,其中$C$为任意常数.

解 原式$=\frac{1}{2}\int x^2de^{x^2}=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\int xe^{x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C=\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C$,其中$C$为任意常数.

26 [1994—Ⅲ] 求$\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

解法1 原式$=\int \frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$=\frac{1}{4}\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}d\left(\tan \frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|+C$,其中$C$为任意常数.

解法2 原式$=\int \frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\int \frac{\sin xdx}{2(1-\cos^2x)(1+\cos x)}$

$\xlongequal{\cos x=u}-\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u)(1+u)^2}=-\frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{1-u}+\frac{3+u}{(1+u)^2}\right]du$

$=\frac{1}{8}\left(\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}\right)+C=\frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C$,

其中C为任意常数.

27 [1995—Ⅲ] 设$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且$f[\varphi(x)]=\ln x$,求$\int \varphi(x)dx$.

解 因为$f(x^2-1)=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$,所以$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

又$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$,从而$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$,$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$. 于是

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=2\ln(x-1)+x+C,\text{其中 }C\text{ 为任意常数.}$$

注 由$\frac{x^2}{x^2-2}>0$且$x>0$知$x>\sqrt{2}$,故$\ln(x-1)$不必加绝对值.

28 [1996—Ⅲ] 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解法1 原式$=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$,其中$C$为任意常数.

解法2 原式$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}$

$=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$,其中$C$为任意常数.

29 [1996—Ⅲ] 计算不定积分$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$,其中$C$为任意常数.

30 [1997] $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$______.

答 应填$2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$或$\arcsin\frac{x-2}{2}+C$,其中$C$为任意常数.

解 本题考查积分公式:
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

因此
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

或令$t=\sqrt{x}$,则
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}=2\arcsin\frac{t}{2}+C=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C,\text{其中 }C\text{ 为任意常数.}$$

31 [1997] 计算$\int e^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int e^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$

$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$

$=e^{2x}\tan x+C$,其中C为任意常数.

32 [1998] $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$______.

答 应填$-\cot x\cdot\ln(\sin x)-\cot x-x+C$,其中$C$为任意常数.

解 直接令$u=\ln(\sin x)$,$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$,$v=-\cot x$,便得

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x&=-\cot x\cdot\ln(\sin x)+\int\cot^2 x\mathrm{d}x\\&=-\cot x\cdot\ln(\sin x)+\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x\\&=-\cot x\cdot\ln(\sin x)-\cot x-x+C,\end{aligned}$$

其中C为任意常数.

33 [1999] $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$______.

答 应填$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$,其中$C$为任意常数.

解
$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+\int\frac{8\mathrm{d}x}{x^2-6x+13}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C,$$
其中C为任意常数.

34 [2000] 设$f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$,计算$\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 设$\ln x=t$,则$x=\mathrm{e}^t$,$f(t)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$. 所以
$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$
$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C,\text{其中}C\text{为任意常数.}$$

注 还可这样处理:$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C$,其中$C$为任意常数.

35 [2001] 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 设$x=\tan u$,则$\mathrm{d}x=\sec^2u\mathrm{d}u$.
$$\text{原式}=\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u\cdot(2\tan^2u+1)}=\int\frac{\cos u\mathrm{d}u}{2\sin^2u+\cos^2u}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}(\sin u)}{1+\sin^2u}=\arctan(\sin u)+C$$
$$=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C,\text{其中}C\text{为任意常数.}$$

36 [2003] 计算不定积分$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

解法1 设$x=\tan t$,则
$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^t\tan t}{(1+\tan^2t)^{3/2}}\sec^2t\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$
又 $$\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}(\cos t)=-\left(\mathrm{e}^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t\right)=-\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$
故 $$\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C.$$
因此 $$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C,$$
其中C为任意常数.

解法2 $$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$
移项整理得
$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C,\text{其中}C\text{为任意常数.}$$

37 [2006] 求$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

解 令 $\arcsin e^x = t$,则 $x=\ln(\sin t)$,$dx=\frac{\cos t}{\sin t}dt$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx &= \int \frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt = -\int t d\left(\frac{1}{\sin t}\right)\\
&= -\frac{t}{\sin t}+\int\frac{1}{\sin t}dt = -\frac{t}{\sin t}+\ln|\csc t-\cot t|+C\\
&= -\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\ln\left|\frac{1}{e^x}-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right|+C\\
&= -\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\ln(1-\sqrt{1-e^{2x}})-x+C.
\end{aligned}
$$

其中 C 为任意常数.

38 [2009] 计算不定积分$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx\ (x>0)$.

解 令$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$,则 $x=\frac{1}{t^2-1}$,于是

$$
\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\int\ln(1+t)d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}dt,
$$

又

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}dt &= \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right]dt\\
&=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}-C.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C\\
&= x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C,
\end{aligned}
$$

其中 C 为任意常数.

注 本题主要考查不定积分的换元与分部积分法.

39 [2014] 设 $f(x)$是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$,$x\in[0,2]$,则$f(7)=$________.

答 应填 1.

解 当 $x\in[0,2]$ 时,$f(x)=\int 2(x-1)dx=x^2-2x+C$. 由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$,即 $f(x)=x^2-2x$.
又 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数,故 $f(7)=f(-1)=-f(1)=1$.

40 [2016] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$ (B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ (D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

答 应选(D).

解法 1 $F(x)=\begin{cases}\int 2(x-1)dx, & x<1,\\ \int\ln x dx, & x\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}(x-1)^2+C_1, & x<1,\\ x(\ln x-1)+C_2, & x\geqslant 1.\end{cases}$

$$
\lim_{x\to 1^-}[(x-1)^2+C_1]=C_1,\ \lim_{x\to 1^+}[x(\ln x-1)+C_2]=-1+C_2,
$$

则 $C_1=-1+C_2$,令 $C_1=C$,则 $C_2=1+C$,

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+C, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1+C, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

令 $C=0$,则 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

故应选(D).

解法 2 利用变限积分函数表示一个原函数. 记 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

当 $x<1$ 时,$F(x)=\int_1^x 2(t-1)\mathrm{d}t=x^2-2x+1=(x-1)^2$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$F(x)=\int_1^x \ln t\mathrm{d}t=t\ln t\Big|_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=x\ln x-(x-1)=x(\ln x-1)+1$.

故
$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

故应选(D).

注 (1) 本题考查的是分段函数的原函数,关键是分段点的处理,由于原函数一定是连续函数,故排除选项(A),(C);

(2) 解法 2 较解法 1 简单,读者应学会利用变限积分函数来表示一个具体的原函数,即 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$,对于分段函数 $f(x)$,a 往往取分段点更简单.

3.3 定积分的计算

考点点睛

定积分的计算有基本方法(牛顿—莱布尼茨公式,换元法,分部积分法),也有其特色方法(利用几何意义,利用奇偶性与周期性,利用基本公式等).

1. 利用定积分的几何意义(几个常用的面积积分)

$$\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2,\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2,$$

$$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2,\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

2. 利用对称性与奇偶性

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 是奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}.\end{cases}$$

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则对任意 a 有

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 利用基本公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, & n\text{ 是大于 1 的正奇数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 是正的偶数}\end{cases}\quad(\text{华里士公式}).$$

设 $f(x)$ 连续，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x, \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

41 [1987—Ⅲ] $\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=$________.

答 应填 $\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$.

解 $$\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}f(2x)\Big|_a^b=\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)].$$

42 [1987—Ⅲ] 计算定积分 $\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

令 $x = \sin t$，有 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$，因此 $\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

43 [1988—Ⅲ] $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

答 应填 $2(\mathrm{e}^2+1)$.

解 $$\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{x}=t} 2\int_0^2 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\int_0^2 t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = 2\left(t\mathrm{e}^t\Big|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right) = 2(\mathrm{e}^2+1).$$

44 [1989—Ⅲ] $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t=$________.

答 应填 π.

解 $$\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi} t\mathrm{d}(\cos t)=-t\cos t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t=\pi.$$

注 对积分 $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t$ 更好的处理是利用"3.3 考点点睛"中的"3.利用基本公式"

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

这样最为方便，故 $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t = \pi$.

45 [1989—Ⅲ] 已知 $f(2)=\frac{1}{2}, f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

解 设 $t=2x$，则

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{t^2}{4}f''(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[t^2 f'(t)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[-2\int_0^2 t\mathrm{d}f(t)\right]=-\frac{1}{4}\left[tf(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]=-\frac{1}{4}(1-1) = 0.$$

注 被积函数中出现导数 $f'(x), f''(x)$ 等时，往往要使用分部积分法.

46 [1990—Ⅲ] $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=$________.

答 应填 $\frac{4}{15}$.

解 令 $\sqrt{1-x}=t$，则原式 $=\int_1^0 (t^2-1)2t^2\mathrm{d}t=2\int_1^0 (t^4-t^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{15}$.

注　一般地，$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$(作 $t=1-x$ 的换元)，于是直接有$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x=\cdots$. 对于这种积分$\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$ 按照这样计算是最简单的.

47 [1991—Ⅲ]　计算 $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$.

解　令 $t=\sqrt{x}$. 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是有

$$原式=\int_1^2\frac{2\mathrm{d}t}{t(1+t)}=2\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2[\ln t-\ln(1+t)]\Big|_1^2=2\ln\frac{4}{3}.$$

48 [1991—Ⅲ]　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x$，$x\in[0,\pi)$，计算$\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

解法 1　$$\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}f(x-\pi)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令 t=x-\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\pi t\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}-2+\int_\pi^{2\pi}f(t-\pi)\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{令 u=t-\pi}\frac{\pi^2}{2}-2+\int_0^\pi f(u)\mathrm{d}u=\pi^2-2.$$

解法 2　x 在$[\pi,3\pi]$中有 $f(x)=\begin{cases}x-\pi+\sin x, & x\in[\pi,2\pi),\\ x-2\pi, & x\in[2\pi,3\pi),\end{cases}$

$$\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}(x-\pi+\sin x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(x-2\pi)\mathrm{d}x=\pi^2-2.$$

49 [1992—Ⅲ]　求 $\int_0^\pi\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x$.

解　$$原式=\int_0^\pi\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=4(\sqrt{2}-1).$$

注　对于定积分，开平方在不确定正负的情况下，要加绝对值，本题中

$$\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|.$$

50 [1992—Ⅲ]　设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解　令 $x-2=t$，则原式$=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0(1+t^2)\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

注　也可以先求出 $f(x-2)$的表达式，然后再去作积分$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$，但不如上面的方法简单.

51 [1993—Ⅲ]　求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解　$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{2}\left(x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

52 [1994—Ⅲ]　计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.

解　令 $x^2=\sin t$，则 $x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 于是有

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{32}.$$

53 [1995—Ⅲ] 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

解 $\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)dx$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dt - \int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx = \int_0^\pi \frac{\pi-x}{\pi-x}\sin x dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

注 本题是属于含变限积分的定积分的问题，处理这类定积分时有两种方法：一是可以采用分部积分法（取变限积分函数作为分部积分中的 u，如上解答），二是可以化累次积分为二重积分，然后交换积分次序进行计算，具体表述为 $\int_0^\pi dx\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt = \int_0^\pi dt\int_t^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dx = \int_0^\pi \sin t dt = 2$.

54 [1996—Ⅲ] $\int_{-1}^1 (x+\sqrt{1-x^2})^2 dx=$________.

答 应填 2.

解 原式 $=\int_{-1}^1[x^2+2x\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)]dx = \int_{-1}^1 dx + 2\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}dx = 2$，

其中 $\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}dx=0$，由于 $x\sqrt{1-x^2}$ 为奇函数.

55 [1996—Ⅲ] 计算 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$.

解法 1 原式 $=\int_0^{\ln 2} e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}dx = -e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

解法 2 令 $e^{-x}=\sin t$，则 $dx=\frac{-\cos t}{\sin t}dt$，

原式 $=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt = -\ln(\csc t+\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

56 [1999] 函数 $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 上的平均值为________.

答 应填 $\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$.

解 函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值是指 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，故所求的平均值为

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

令 $x=\sin\theta$，则上式等于

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi.$$

注 要掌握平均值的概念，在 2016 考题中又一次出现了有关平均值的题目.

57 [2001] $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx=$________.

答 应填 $\frac{\pi}{8}$.

解 这是对称区间上的定积分，一般都可利用积分性质化简计算，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin^4 x)\mathrm{d}x=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

58 [2001] 设函数 $f(x)$,$g(x)$满足 $f'(x)=g(x)$,$g'(x)=2e^x-f(x)$,且 $f(0)=0$,$g(0)=2$,求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$.

解 由 $f'(x)=g(x)$得 $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$,于是有

$$\begin{cases}f''(x)+f(x)=2e^x,\\ f(0)=0,\\ f'(0)=2,\end{cases}$$

解之得

$$f(x)=\sin x-\cos x+e^x.$$

故

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]=\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

59 [2005] 如图 1-3-6,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4).设函数 $f(x)$具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

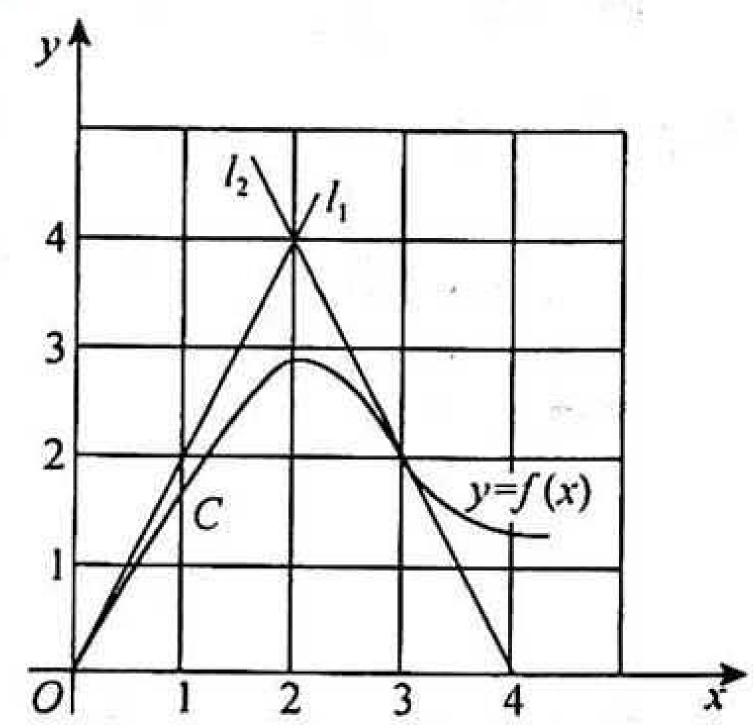


图 1-3-6

解

$$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$$

$$=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-[7\times(-2)-2]+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=16+2f(x)\Big|_0^3=16+4=20.$$

注 被积函数中有函数的导数,考虑使用分部积分法,并结合导数的几何意义及拐点的必要条件等确定出相关数值.

3.4 反常积分的计算

60 [1991-Ⅲ] $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$______.

答 应填 1.

解 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=0-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=1.$

61 [1992-Ⅲ] $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=$______.

答 应填$\frac{1}{2}\ln 2$.

解 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

62 [1993—Ⅲ] 求 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$.

解 原式 $=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]\Big|_0^b=\frac{1}{2}$.

63 [1997] $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=$________.

答 应填 $\frac{\pi}{8}$.

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+4}\xlongequal{u=\frac{x+2}{2}}\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\arctan u\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

64 [1998] 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解 由于 $x-x^2=x(1-x)$,故 $|x-x^2|=\begin{cases}x-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2-x, & 其他,\end{cases}$

于是

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}=\ln(2+\sqrt{3}).$$

因此 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

65 [1999] 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

解 原式 $=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^b\right)+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x(1+x^2)}dx$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2\right]$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

66 [2000] $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$________.

答 应填 $\frac{\pi}{3}$.

解 令 $t=\sqrt{x-2}$,则 $x=t^2+2$,$dx=2tdt$. 当 $x=2$ 时,$t=0$;当 $x\to+\infty$,$t\to+\infty$. 所以

$$原式=\int_0^{+\infty}\frac{2tdt}{(t^2+9)t}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^b\right)=\frac{\pi}{3}.$$

67 [2004] $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$________.

答 应填$\frac{\pi}{2}$.

解 若令$x=\sec t$,则$dx=\sec t\cdot\tan t dt$,于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t dt}{\sec t\cdot\tan t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

也可令$x=\frac{1}{t}$,则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$,于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

68 [2005] $\int_0^1\frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$________.

答 应填$\frac{\pi}{4}$.

解 令$x=\sin t$,$dx=\cos t dt$,则有

$$\int_0^1\frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cdot\cos t dt}{(2-\sin^2 t)\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-d(\cos t)}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

69 [2006] 反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{x dx}{(1+x^2)^2}=$________.

答 应填$\frac{1}{2}$.

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{x dx}{(1+x^2)^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x dx}{(1+x^2)^2}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^b\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+b^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

70 [2008] 计算$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 由于$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$,故$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$是反常积分.

令$\arcsin x=t$,有$x=\sin t$,$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t d(\sin 2t)$$
$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.$$

71 [2009] 已知$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=1$,则$k=$________.

答 应填-2.

解 因为

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=2\int_0^{+\infty}e^{kx}dx=2\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^b,$$

又因为极限存在,所以$k<0$,$1=-\frac{2}{k}$,因此$k=-2$.

72 [2011] 设函数$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $\lambda>0$,则$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$________.

答 应填$\frac{1}{\lambda}$.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}x de^{-\lambda x}$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

73 [2014] $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=$________.

答　应填 $\frac{3}{8}\pi$.

解　$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3\pi}{8}.$

74 [2017] $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

答　应填 1.

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$
$$=-\frac{\ln(1+x)}{1+x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$
$$=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

3.5　反常积分的判敛

考点点睛

反常积分的判敛主要可借助以下理论：

(1) $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\begin{cases}\text{收敛},p>1,\\ \text{发散},p\leqslant 1\end{cases}(a>0).$

(2) $\int_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\begin{cases}\text{收敛},p<1,\\ \text{发散},p\geqslant 1\end{cases}(a\text{ 是唯一瑕点}).$

(3) $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\ln^\beta x}\begin{cases}\text{收敛},\alpha>1,\forall\beta,\\ \text{发散},\alpha<1,\forall\beta,\\ \text{收敛},\alpha=1,\beta>1,\\ \text{发散},\alpha=1,\beta\leqslant 1\end{cases}(a>1).$

(4) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散（$[a,+\infty)$ 内无瑕点），即同阶同敛散，对无界函数的反常积分有着同样的结论.

75 [2010] 设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　　(D) 与 m,n 的取值都无关.

答　应选(D).

解
$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x.$$

当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$，由于对任意正整数 m,n 都有 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$，故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛；

当 $x \to 1^-$ 时,$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt[m]{\ln^2(1-x)}dx$ 同敛散,且当 $x \to 1^-$ 时,$|\ln(1-x)| \leqslant \frac{1}{(1-x)^\epsilon}$,对任意的 $\epsilon>0$,则当 $x \to 1^-$ 时,对任意的 $\epsilon>0$,$|\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)| \leqslant \frac{1}{(1-x)^{\frac{2\epsilon}{m}}}$.特殊地,取 $\epsilon=\frac{m}{4}>0$,当 $x\to 1^-$ 时,$|\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)| \leqslant \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ 成立,此时 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx$ 收敛,则 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}dx$ 收敛,进而 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛(任意的 m,n).于是选(D).

76 [2013] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e,\\ \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant e.\end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,则

(A)$\alpha<-2$.　(B)$\alpha>2$.　(C)$-2<\alpha<0$.　(D)$0<\alpha<2$.

答 应选(D).

解 考虑积分 $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx$,当 $\alpha-1\leqslant 0$,即 $\alpha\leqslant 1$ 时,为普通定积分,积分自然存在;当 $\alpha-1>0$ 时,$\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx$ 为无界函数的反常积分,且当 $\alpha-1<1$,即 $\alpha<2$ 时收敛,当 $\alpha-1\geqslant 1$,即 $\alpha\geqslant 2$ 时发散.

无穷区间上的反常积分

$$\int_e^{+\infty} f(x)dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\ln^\alpha x}\bigg|_e^{+\infty},$$

当 $\alpha>0$ 时,此反常积分收敛,当 $\alpha\leqslant 0$ 时,发散.

由以上分析知,若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,则有 $0<\alpha<2$,故选(D).

77 [2015] 下列反常积分中收敛的是

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.　(B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.　(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$.　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$.

答 应选(D).

解法1 排除法.易知(A),(B),(C)三个反常积分是发散的.因为

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\bigg|_2^{+\infty}=+\infty;$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int_2^{+\infty}\ln x d(\ln x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2\bigg|_2^{+\infty}=+\infty;$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\ln(\ln x)\bigg|_2^{+\infty}=+\infty.$$

解法2 直接考查(D).

$$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx=-\int_2^{+\infty}xde^{-x}=-xe^{-x}\bigg|_2^{+\infty}+\int_2^{+\infty}e^{-x}dx=2e^{-2}-e^{-x}\bigg|_2^{+\infty}=3e^{-2},$$

因此(D)是收敛的.

78 [2016] 反常积分① $\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$,② $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为

(A)①收敛,②收敛.　(B)①收敛,②发散.　(C)①发散,②收敛.　(D)①发散,②发散.

答 应选(B).

解 $\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=\int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{x}}d\left(-\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{1}{x}}\bigg|_{-\infty}^0=1$,收敛;

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_0^{+\infty}=+\infty,\text{发散}.$$

故应选(B).

3.6　变限积分函数的性质及应用

变限积分函数最重要的就是求导公式，作为一种用积分表达的函数，可对其讨论各种问题，如求极限，求导数，求单调区间与极值、最值，求凹凸区间与拐点等.

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除 $x=x_0$ 外处处连续，

① 若 $x=x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$.

② 若 $x=x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

③ 若 $x=x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=x_0$ 处不可导.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\alpha(x),\beta(x)$ 在 $[a,b]$ 上均可导，则

$$F'(x)=\left[\int_{\beta(x)}^{\alpha(x)}f(t)dt\right]'=f[\alpha(x)]\cdot\alpha'(x)-f[\beta(x)]\cdot\beta'(x).$$

当参变量 x 出现在被积函数中时，应该设法把 x 分离到积分限或积分号外再求导，常见的有如下几种情形：

① $\int_0^x xf(t)dt=x\int_0^x f(t)dt$.

② $\int_0^x f(tx)dt\xlongequal{tx=u}\frac{1}{x}\int_0^{x^2}f(u)du$.

③ $\int_a^b f(tx)dt\xlongequal{tx=u}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f(u)du$ (a,b 是常数).

(4) 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积，则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt\begin{cases}\text{奇函数，若 } f(x)\text{ 是偶函数},\\ \text{偶函数，若 } f(x)\text{ 是奇函数}.\end{cases}$

79 [1987—Ⅲ] 设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，其中 $f(x)$ 连续，$s>0,t>0$，则 I 的值

(A)依赖于 s,t.　　(B)依赖于 s,t,x.

(C)依赖于 t,x，不依赖于 s.　　(D)依赖于 s，不依赖于 t.

答　应选(D).

解　$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx\xlongequal{tx=u}\int_0^s f(u)du$，由此可见，$I$ 的值只与 s 有关，所以应选(D).

80 [1988—Ⅲ] 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$，则 $f(7)=$________.

答　应填 $\frac{1}{12}$.

解 等式$\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t=x$,两边对$x$求导,得$3x^2f(x^3-1)=1$.令$x=2$得$12f(7)=1$,则$f(7)=\frac{1}{12}$.

81 [1988—Ⅲ] 设$x\geqslant -1$,求$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$.

解 当$-1\leqslant x<0$时,原式$=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+t)^2\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}(1+x)^2$;

当$x\geqslant 0$时,原式$=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_0^x(1-t)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$.

注 在$x\geqslant 0$时,$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$切勿写成:$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(1-t)\mathrm{d}t$,因为积分变量$t$介于$-1$与$x$之间,而$x\geqslant 0$时,$t$此时可取遍$-1$到0这一段(当然还有0到$x$这一段),故正确写法如答案所示;下面的83题,88题,91题及96题都是这类问题.

82 [1990—Ⅲ] 设$f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$,其中$x>0$,求$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=\frac{1}{y}}\int_1^x\frac{\ln y}{y(1+y)}\mathrm{d}y$,于是

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2x.$$

83 [1991—Ⅲ] 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$记$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,0\leqslant x\leqslant 2$,则

(A)$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ (B)$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ (D)$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

答 应选(B).

解 当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}$;当$1<x\leqslant 2$时,$F(x)=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t=-\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}$.由此可见应选(B).

注 $f(x)$在$[0,2]$上可积,则$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$[0,2]$上连续,于是排除(A),(C),(D).

84 [1992—Ⅲ] 设$f(x)$连续,$F(x)=\int_0^{x^2}f(t^2)\mathrm{d}t$,则$F'(x)$等于

(A)$f(x^4)$. (B)$x^2f(x^4)$. (C)$2xf(x^4)$. (D)$2xf(x^2)$.

答 应选(C).

解 由$F(x)=\int_0^{x^2}f(t^2)\mathrm{d}t$知$F'(x)=2xf(x^4)$.故应选(C).

85 [1993—Ⅲ] 已知$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$设$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 2)$,则$F(x)$为

(A)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ (B)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(C)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ (D)$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

答　应选(D).

解　$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_1^x t^2\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<1,\\ \int_1^x 1\mathrm{d}t, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3}(x^3-1), & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

所以应选(D).

注　$f(x)$在$[0,2]$上可积，则$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$在$[0,2]$上连续，于是排除(A),(B),(C).

86 [1994—Ⅲ]　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\cos 3x} f(t)\mathrm{d}t\right)=$________.

答　应填$-3f(\cos 3x)\sin 3x$.

解　由变上限积分求导法可知$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{\cos 3x} f(t)\mathrm{d}t\right]=-3f(\cos 3x)\sin 3x$.

87 [1998]　设$f(x)$连续，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$________.

答　应填$xf(x^2)$.

解　令$u=x^2-t^2$，$\mathrm{d}u=-2t\mathrm{d}t$. 当$t=0$时，$u=x^2$，当$t=x$时，$u=0$，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u=xf(x^2).$$

注　本题属于要先作换元然后才能求导的类型.

88 [2000]　设xOy平面上有正方形$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$及直线$l:x+y=t(t\geqslant 0)$. 若$S(t)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积(如图1—3—7)，试求$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$.

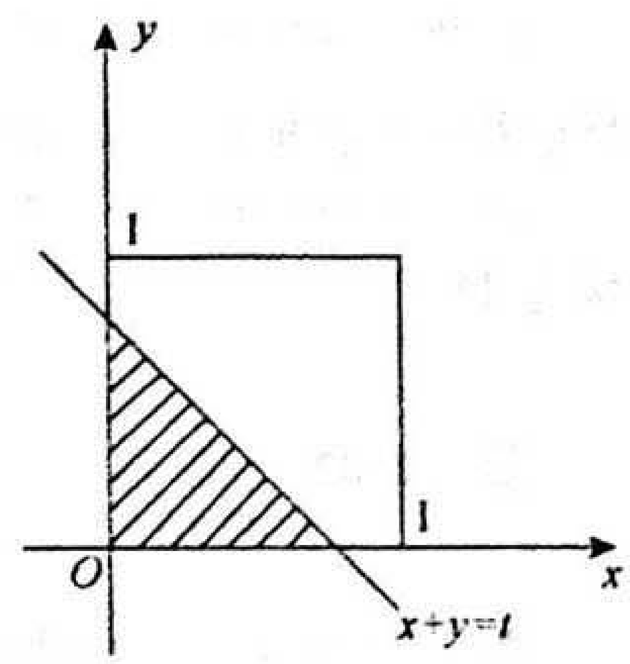


图1—3—7

解　由题设知

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

所以，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{6}x^3$；

当$1<x\leqslant 2$时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t+\int_1^x S(t)\mathrm{d}t=-\frac{x^3}{6}+x^2-x+\frac{1}{3}$；

当$x>2$时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 S(t)\mathrm{d}t+\int_2^x S(t)\mathrm{d}t=x-1$.

因此

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

89 [2001]　设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，且其反函数为$g(x)$，若$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=x^2e^x$，求$f(x)$.

解　等式两边对x求导得　$g[f(x)]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，

而$g[f(x)]=x$，故　$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$.

当$x\neq 0$时，　$f'(x)=2e^x+xe^x$，

积分得　$f(x)=(x+1)e^x+C$.

由于$f(x)$在$x=0$处右连续，故由

$$0=f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}[(x+1)e^x+C],$$

得 $C=-1$,因此 $f(x)=(x+1)e^x-1$.

注 部分考生对 $g[f(x)]=x$ 这一反函数的基本性质不熟悉,导致后续无法化简;积分方程往往都是通过求导转化为微分方程再去求解,另外本题利用初始条件确定 C 的值的过程值得体会.

90 [2002] 设函数 $f(x)$连续,则下列函数中,必为偶函数的是

(A) $\int_0^x f(t^2)dt$.　　(B) $\int_0^x f^2(t)dt$.

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$.　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$.

答 应选(D).

解 设 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$,则

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]dt\\&\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x(-u)[f(-u)+f(u)]d(-u)\\&=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]du=F(x),\end{aligned}$$

即 $F(x)$是偶函数,(D)是正确的.

同理可以证明(A),(C)均为奇函数. 而对(B)中的函数,因为 $\int_0^{-x} f^2(t)dt\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x -f^2(-u)du$,由所给条件不能推出为偶函数.

注 $f(t)-f(-t)$是奇函数,$f(t)+f(-t)$是偶函数,于是根据"3.6 考点点睛"中的最后一条性质,直接选(D).

91 [2002] 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ 的表达式.

解 当 $x\in[-1,0)$时,

$$F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt=\int_{-1}^x\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^x=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2};$$

当 $x\in[0,1]$时,

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-1}^x f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^0+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt\\&=-\frac{1}{2}+\int_0^x(-t)d\left(\frac{1}{e^t+1}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{dt}{e^t+1}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{de^t}{e^t(e^t+1)}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\left(\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e^t+1}\right)de^t\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^t}{e^t+1}\Big|_0^x\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}-\ln\frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2}+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{x}{e^x+1}+\ln 2-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

92 [2004] 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$,

(Ⅰ)证明 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数；

(Ⅱ)求 $f(x)$的值域.

(Ⅰ)证
$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t.$$

设 $t=u+\pi$,则有

$$f(x+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\mathrm{d}u=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x).$$

故 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数.

(Ⅱ)解 因为$|\sin x|$在$(-\infty,+\infty)$内连续,注意到 $f(x)$的周期为 π,故只需在$[0,\pi]$上讨论其值域.

因为
$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=\frac{\pi}{4}$,$x_2=\frac{3\pi}{4}$,且

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=\sqrt{2},\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}.$$

又
$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1,\ f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\mathrm{d}t=1,$$

因而 $f(x)$的最小值是 $2-\sqrt{2}$,最大值是$\sqrt{2}$,故 $f(x)$的值域是$[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

注 求连续函数的值域实际上就是求最大值与最小值,转化为一元连续函数求最值的问题.

93 [2006] 设 $f(x)$是奇函数,除 $x=0$ 外处处连续,$x=0$ 是其第一类间断点,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是

(A)连续的奇函数.　　　　(B)连续的偶函数.

(C)在 $x=0$ 间断的奇函数.　　　　(D)在 $x=0$ 间断的偶函数.

答 应选(B).

解法 1 取函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 它满足题设条件,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=|x|$ 是一个连续的偶函数,从而排除了选项(A),(C),(D),故选(B).

解法 2 显然 $f(x)$ 在任何有限区间$[a,b]$上都可积,于是 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 连续；又因 $f(x)$ 是奇函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数,故选(B).

94 [2007] 设 $f(x)$是区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的单调、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

其中 f^{-1}是 f 的反函数,求 $f(x)$.

解 在$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导,得

$$f^{-1}[f(x)]\cdot f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x},$$

即
$$xf'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}.$$

当 $x\neq0$ 时,
$$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x},$$

故
$$f(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\ln(\sin x+\cos x)+C,x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right].$$

在题中所给等式中令 $x=0$ 得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=0$，因 $f(x)$ 是 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调、可导函数，$f^{-1}(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，它是单调、非负的，故必有 $f(0)=0$，从而

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}[\ln(\sin x+\cos x)+C]=C=0,$$

于是
$$f(x)=\ln(\sin x+\cos x),x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].$$

注 (1) 本题又一次用到了反函数的基本性质：$f^{-1}[f(x)]=x$；

(2)
$$\int\frac{m\sin x+n\cos x}{p\sin x+l\cos x}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{A(p\sin x+l\cos x)'}{p\sin x+l\cos x}+\frac{B(p\sin x+l\cos x)}{p\sin x+l\cos x}\right]\mathrm{d}x$$
$$=A\ln|p\sin x+l\cos x|+Bx+C,$$

利用待定系数确定 A,B 的值.

95 [2009] 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图 1—3—8 所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为

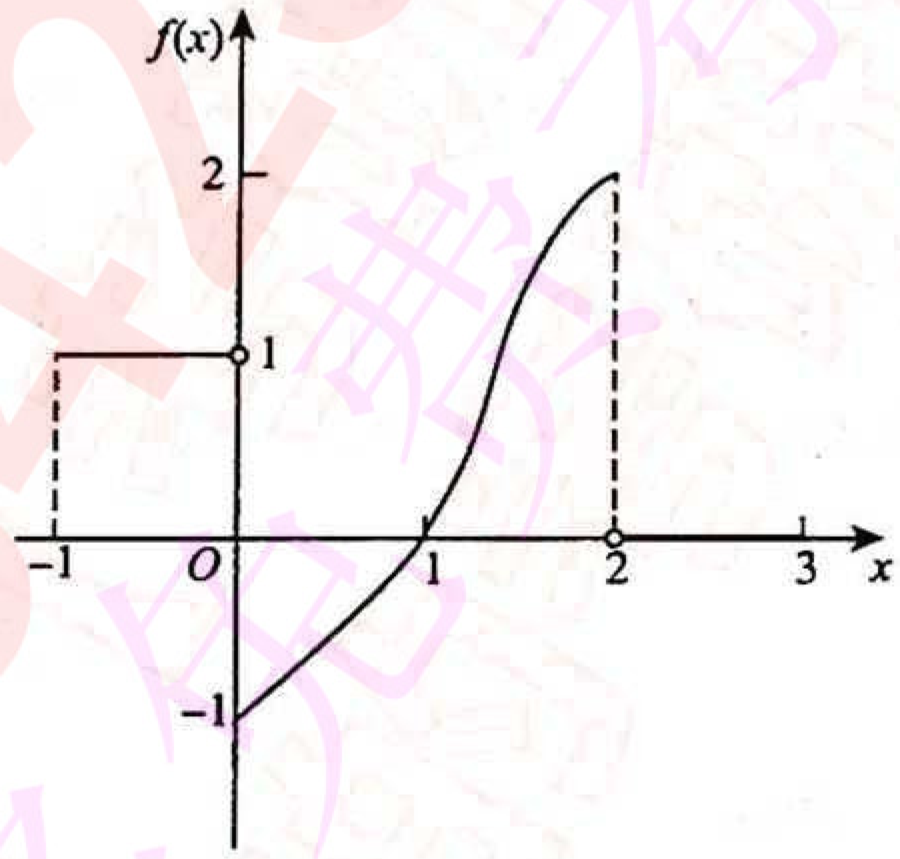
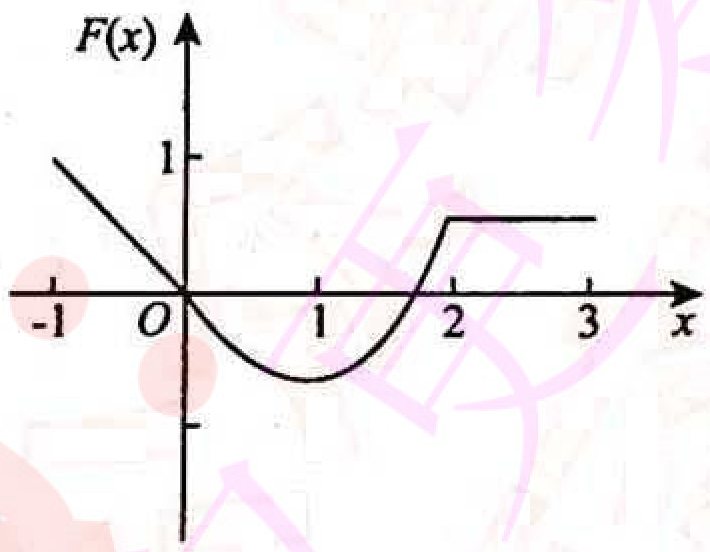
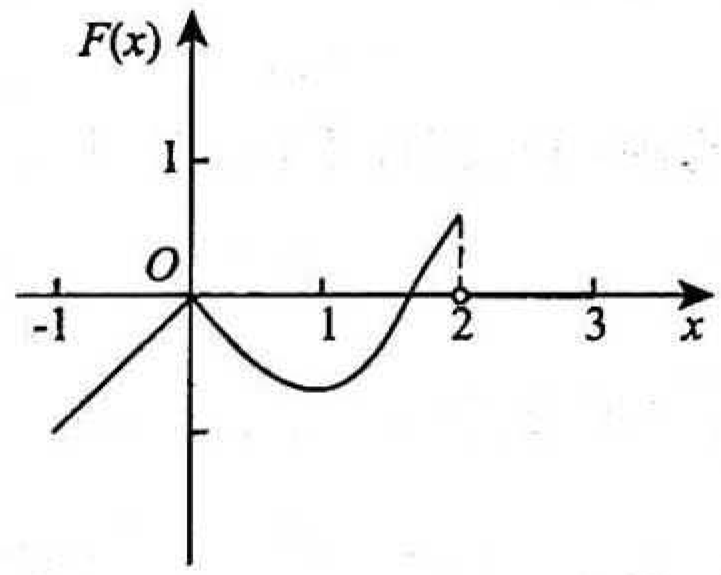


图 1—3—8

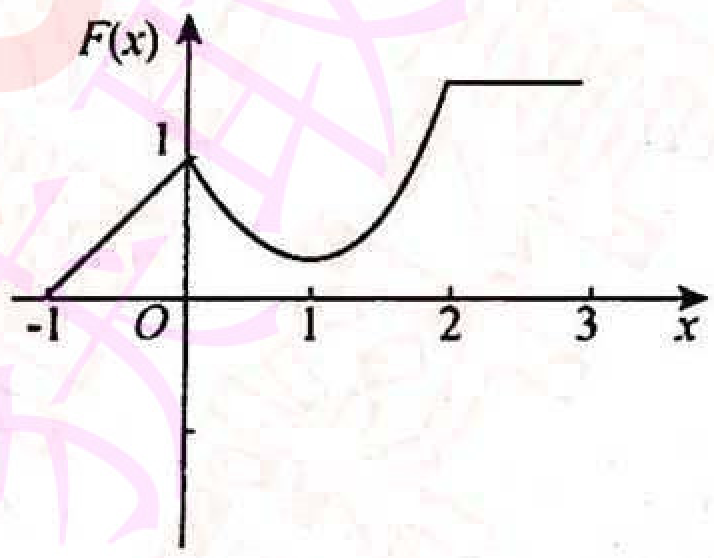
(A)



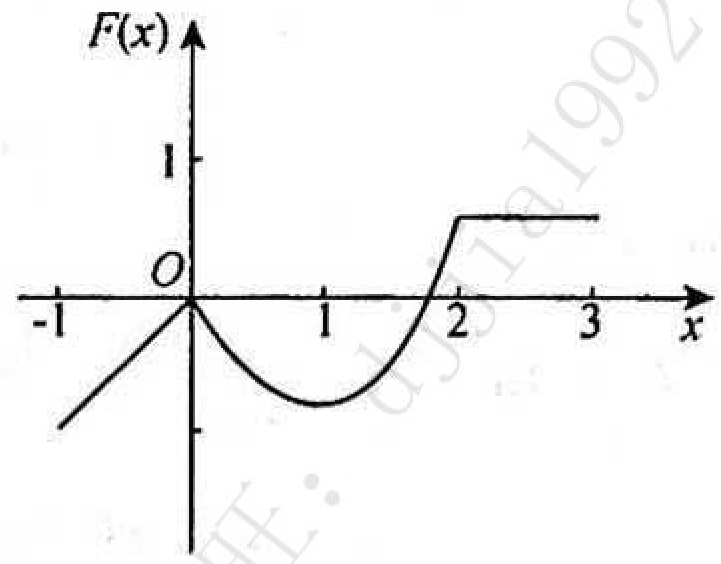
(B)



(C)



(D)



答 应选(D).

解 根据题中函数 $y=f(x)$ 的图形，可知函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在除了 $x=0,x=2$ 两点外可导，且 $F'(x)=f(x)$. 由此可知：函数 $F(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递增，在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $(1,2)$ 内单调递增，在 $(2,3)$ 内恒为常数. 由于函数 $F(x)$ 连续，且 $F(0)=0$，所以正确选项只能是(D).

96［2013］　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　(B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.　　(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

答　应选(C).

解法1　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x \sin t\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<\pi,\\ \int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^x 2\mathrm{d}t, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}=\begin{cases}1-\cos x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2+2x-2\pi, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$

因为
$$\lim_{x\to\pi^-}F(x)=\lim_{x\to\pi^+}F(x)=F(\pi)=2,$$
所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续.

又
$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1-\cos x-2}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1}=0,$$
$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2+2x-2\pi-2}{x-\pi}=2,$$
可知 $F'_-(\pi)\neq F'_+(\pi)$，即 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导，故选(C).

解法2　根据“3.6 考点点睛”中的“(1),(2)”两条基本性质，直接选(C).

97［2015］　设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$. 若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$________.

答　应填 2.

解　改写 $\varphi(x)=x\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，由变限积分求导法得
$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t+xf(x^2)\cdot 2x=\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2),$$
由
$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1,\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=1+2f(1)=5$$
得 $f(1)=2$.

98［2016］　设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

解　当 $0<x\leqslant 1$ 时，
$$f(x)=\int_0^x|t^2-x^2|\mathrm{d}t+\int_x^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t=\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3};$$
当 $x>1$ 时，
$$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3},$$
所以
$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2-\frac{1}{3}, & x>1,\end{cases}$$
而
$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2,f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2,$$
故
$$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$
由 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$，又 $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$，从而 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

3.7 定积分的应用

本部分是数二的重点，几乎每年都会在此处命制一道大题(当然还会有小题)，这部分内容并不困难，首先要求考生熟悉各个几何量与物理量的有关公式，其次还要理解"微元法"的思想，因为随着时间的推移，这部分内容考查的越来越深，比如，目前开始出现"求绕垂直于坐标轴的直线旋转一周所得旋转体的体积"这种问题，这类问题没有现成公式套用，可以采用"微元法"去处理.

3.7.1 求面积

99 [1992—Ⅲ] 由曲线 $y=xe^x$ 与直线 $y=ex$ 所围成图形的面积 $S=$________.

答 应填 $\frac{1}{2}e-1$.

解 由 $xe^x=ex$ 可知 $x(e^x-e)=0$，则 $x=0$ 或 $x=1$.

故
$$S=\int_0^1 |ex-xe^x|\,dx=\frac{1}{2}e-1.$$

100 [1994—Ⅲ] 如图 1—3—9，设曲线方程为 $y=x^2+\frac{1}{2}$，梯形 $OABC$ 的面积为 D，曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1，点 A 的坐标为 $(a,0)$，$a>0$，证明：$\frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}$.

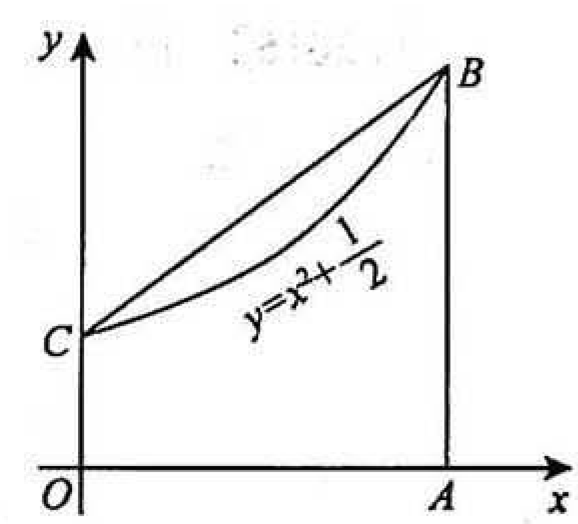


图 1—3—9

证 $D_1=\int_0^a\left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{a^3}{3}+\frac{a}{2}=\frac{(2a^2+3)a}{6}$,

$$D=\frac{\frac{1}{2}+a^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot a=\frac{(a^2+1)a}{2},$$

$$\frac{D}{D_1}=\frac{(a^2+1)a}{2}\Big/\frac{(2a^2+3)a}{6}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+1}{a^2+\frac{3}{2}}.$$

因为 $\frac{a^2+1}{a^2+\frac{3}{2}}<1$，所以 $\frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}$.

101 [1995—Ⅲ] 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形面积可表示为

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

答 应选(C).

解 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴的交点为 $x=0,x=1,x=2$，因此该曲线与 x 轴围成的面积为

$$\int_0^2 |x(x-1)(2-x)|\,dx=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx.$$

所以应选(C).

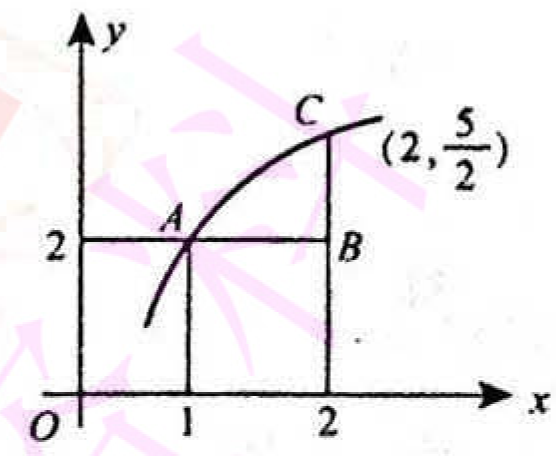


图 1—3—10

102［1996—Ⅲ］ 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$，$x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$________.

答 应填 $\ln 2-\frac{1}{2}$.

解 由如图 1—3—10 可知所求面积为

$$S=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_2^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}y=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x-2x\right)\Big|_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

103［1998］ 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$________.

答 应填 $\frac{37}{12}$.

解 本题是求一条三次抛物线与 x 轴所围图形的面积.应先求出函数 $y=-x^3+x^2+2x$ 的零点：$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=2$.判断图形哪一部分在 x 轴下方，哪一部分在上方，则

$$A=\int_{-1}^0 -(-x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^0+\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2=\frac{37}{12}.$$

104［2002］ 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是________.

答 应填 1.

解
$$A=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

105［2003］ 设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为________.

答 应填 $\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$.

解 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{a\theta})^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{2a\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4a}e^{2a\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$.

106［2013］ 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是________.

答 应填 $\frac{\pi}{12}$.

解 曲线 L：$r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$ 所围成的是“三叶玫瑰线”的一个“花瓣”，注意到图形关于极轴的对称性，其面积为

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+0\right)=\frac{\pi}{12}.$$

3.7.2 求体积

107［1987—Ⅲ］ 设 D 是由曲线 $y=\sin x+1$ 与三条直线 $x=0$，$x=\pi$，$y=0$ 围成的曲边梯形.求 D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

解 $V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x+1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(8+3\pi)$.

108［1988—Ⅲ］ 由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

(A)$\frac{4}{3}$. (B)$\frac{4}{3}\pi$. (C)$\frac{2}{3}\pi^2$. (D)$\frac{2}{3}\pi$.

答 应选(B).

解 $V_x=\pi\int_0^{\pi}(\sin^{\frac{3}{2}}x)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin^3x\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\mathrm{d}x=2\pi\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi.$

注 $\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x.$

109 [1989—Ⅲ] 曲线 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$与 x 轴所围成的图形,绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

(A)$\frac{\pi}{2}$. (B)π. (C)$\frac{\pi^2}{2}$. (D)π^2.

答 应选(C).

解 $V_x=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\mathrm{d}x=2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$

110 [1989—Ⅲ] 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时 $y\geqslant0$,又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为$\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 的值,使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解 因为曲线过原点,所以 $c=0$.

由题设有 $\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$,即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$,则

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{3}\right)\\&=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right].\end{aligned}$$

令 $V'_a=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0$,得 $a=-\frac{5}{4}$,代入 b 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$.

又因 $V''_a\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况,知当 $a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=0$ 时,体积 V 最小.

111 [1990—Ⅲ] 过点 $P(1,0)$作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形,求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解 设所作切线与抛物线相切于点$(x_0,\sqrt{x_0-2})$,因为

$$y'\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}},$$

故此切线方程为

$$y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0).$$

又因该切线过点 $P(1,0)$,所以$-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0)$,即 $x_0=3$.

从而,切线方程为

$$y=\frac{1}{2}(x-1).$$

因此,所求旋转体的体积

$$V=\pi\int_1^3\frac{1}{4}(x-1)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$$

112 [1991—Ⅲ] 曲线 $y=(x-1)(x-2)$和 x 轴围成一平面图形,求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解 在[1,2]上取积分元，体积元

$$dV=2\pi x|y|dx.$$

旋转体的体积 $V=\int_1^2 2\pi x|y|dx=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx=\frac{1}{2}\pi.$

注 曲线 $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b(0\leqslant a<b)$ 及 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积公式为 $V_y=2\pi\int_a^b x|y(x)|dx.$

113 [1993—Ⅲ] 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解 A 的图形如图 1—3—11 中阴影所示，取 y 为积分变量，它的变化区间为[0,1]，A 的两条边界曲线方程分别为 $x=1-\sqrt{1-y^2}$ 及 $x=y$.

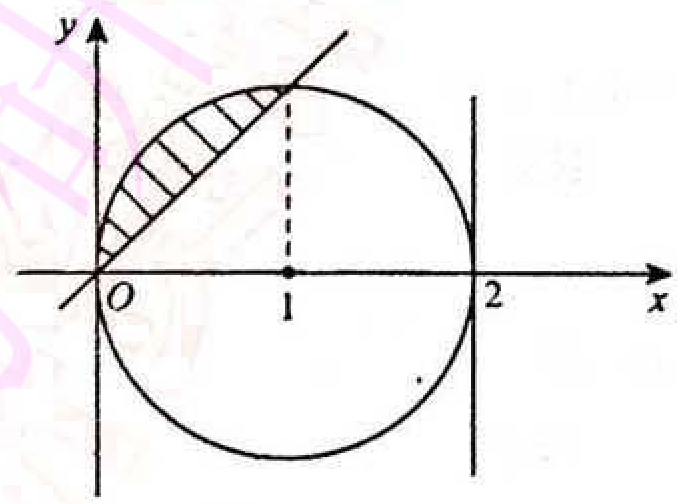


图 1—3—11

相应于[0,1]上任一小区间[$y,y+dy$]的薄片的体积元为

$$dV=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi(2-y)^2\}dy$$
$$=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]dy.$$

于是所求体积为

$$V=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]dy$$
$$=2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{(1-y)^3}{3}\right]\Big|_0^1$$
$$=2\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

注 本题和下面两题属于对旋转体体积要求比较高的问题，考查的是平面图形绕非坐标轴(垂直于坐标轴的直线 $x=2$) 旋转一周所得旋转体体积，这类问题没有现成公式套用，一个有效的办法就是利用“微分法”(推导基本公式的原理) 去求解；当然本题还可以采用对 x 积分，此时微分 $dV=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$，于是 $V=\int_0^1 2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$.

114 [1994—Ⅲ] 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

解 作出图形如图 1—3—12 所示. $\overset{\frown}{AB}$的方程为 $y=x^2+2(0\leqslant x\leqslant 1)$，$\overset{\frown}{BC}$的方程为 $y=4-x^2(1\leqslant x\leqslant 2)$.

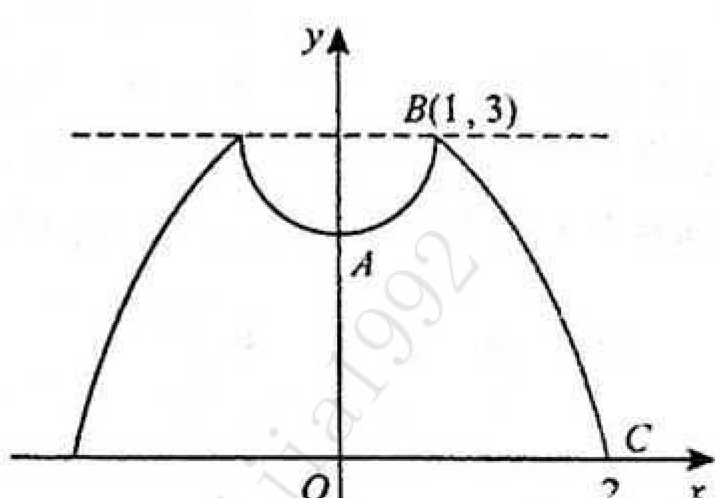


图 1—3—12

设旋转体在区间[0,1]上体积为 V_1，在区间[1,2]上的体积为 V_2，则它们的体积元素分别为

$$dV_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}dx=\pi(8+2x^2-x^4)dx,$$
$$dV_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}dx=\pi(8+2x^2-x^4)dx.$$

由对称性得

$$V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)dx+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)dx$$
$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)dx=\frac{448}{15}\pi.$$

115 [1996—Ⅲ] 设 $f(x),g(x)$ 在区间[a,b]上连续，且 $g(x)<f(x)<m$(m 为常数)，由曲线 $y=g(x),y=f(x),x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为

(A) $\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx.$

(B) $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx.$

(C) $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

(D) $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

答 应选(B).

解 先画草图如图 1—3—13 所示，对 x 积分，体积微元

$$\mathrm{d}V=\{\pi[m-g(x)]^2-\pi[m-f(x)]^2\}\mathrm{d}x,$$

$$V=\pi\int_a^b[m-g(x)]^2\mathrm{d}x-\pi\int_a^b[m-f(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_a^b[2m-g(x)-f(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

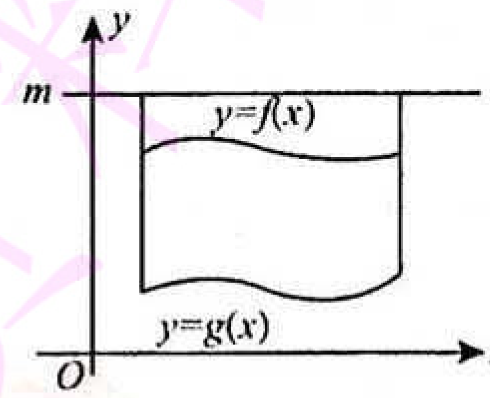


图 1—3—13

所以应选(B).

116 [1996—Ⅲ] 设有一正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a,2b$，用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)的平面截此柱体，得一楔形体(如图 1—3—14)，求此楔形体的体积 V.

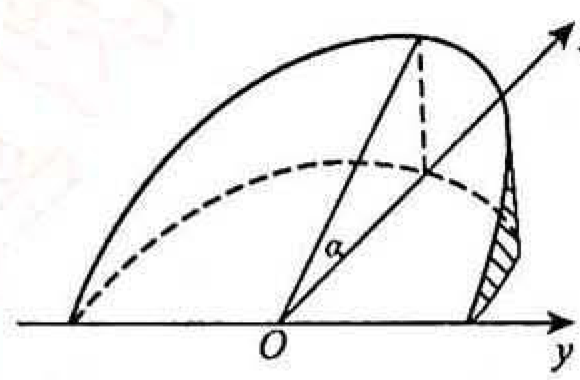


图 1—3—14

解法 1 底面椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

以垂直于 y 轴的平行平面截此楔形体所得的截面为直角三角形，两直角边长分别为

$$a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\text{及 }a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\tan\alpha,$$

故截面积 $S(y)=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha$. 楔形体的体积

$$V=2\int_0^b\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha\mathrm{d}y=\frac{2a^2b}{3}\tan\alpha.$$

解法 2 底面椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，以垂直于 x 轴的平行平面截此楔形体所得的截面为矩形，其边长分别为 $2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ 及 $x\tan\alpha$，故截面面积 $S(x)=2bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\tan\alpha$，楔形体的体积

$$V=\int_0^a 2bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\tan\alpha\mathrm{d}x=b\tan\alpha\left[-\frac{2a^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^a=\frac{2a^2b}{3}\tan\alpha.$$

117 [2000] 设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形(如图 1—3—15). 问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

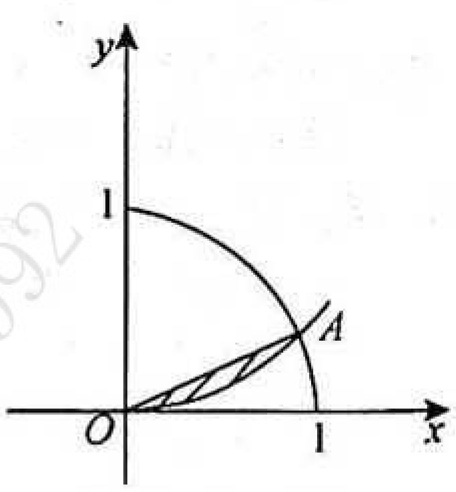


图 1—3—15

解 当 $x\geqslant0$ 时，由$\begin{cases}y=ax^2,\\y=1-x^2,\end{cases}$解得 $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$，$y=\frac{a}{1+a}$，故直线 OA 的方程为

$$y=\frac{ax}{\sqrt{1+a}}.$$

旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{a^2}{3(1+a)}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}=\frac{\pi(4a-a^2)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}}(a>0).$$

令$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$，并由 $a>0$ 得唯一驻点 $a=4$.

由题意知此旋转体在 $a=4$ 时取最大值，其最大体积为

$$V=\frac{2\pi}{15}\times\frac{16}{5^{\frac{5}{2}}}=\frac{32\sqrt{5}}{1\ 875}\pi.$$

118 [2007]　设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域.

(Ⅰ)求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；

(Ⅱ)当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

解　(Ⅰ)所求旋转体的体积为

$$V(a)=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}(a^{-\frac{x}{a}})$$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi(xa^{-\frac{x}{a}})\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2.$$

(Ⅱ)

$$V'(a)=2\pi\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a}.$$

令 $V'(a)=0$，得 $\ln a=1$，从而 $a=\mathrm{e}$. 当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$V'(a)<0$，$V(a)$ 单调减少；当 $a>\mathrm{e}$ 时，$V'(a)>0$，$V(a)$ 单调增加. 所以 $a=\mathrm{e}$ 时 V 最小，最小体积为

$$V(\mathrm{e})=\pi\left(\frac{\mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}}\right)^2=\pi\mathrm{e}^2.$$

119 [2012]　过点(0,1)作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解　设切点 A 的坐标为 (x_1,y_1)，则切线方程为

$$y-y_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1),$$

将点(0,1)代入该切线方程，并注意到 $y_1=\ln x_1$，解得 $x_1=\mathrm{e}^2$，$y_1=2$.

所求面积为

$$S=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\cdot 2=x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^2+1=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2+1-\mathrm{e}^2+1=2.$$

所求体积为

$$V=\pi\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln^2 x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(\mathrm{e}^2-1)=\pi(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\frac{4\pi}{3}(\mathrm{e}^2-1)=\frac{2}{3}\pi(\mathrm{e}^2-1).$$

120 [2013]　设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴围成的平面图形. V_x，V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

解

$$V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5},$$

$$V_y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\pi\int_0^{\sqrt[3]{a}}y^6\mathrm{d}y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\frac{\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}=\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}\text{或}V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}.$$

由 $V_y=10V_x$，即 $\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}=10\cdot\frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$，解得 $a=7\sqrt{7}$.

121 [2015]　设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1，V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

解　$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}A^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2A^2}{4}.$

由 $A>0$，可得

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot A\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-2\pi A\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\pi A.$$

因为 $V_1=V_2$，即$\frac{\pi^2A^2}{4}=2\pi A$，所以 $A=\frac{8}{\pi}$.

注 本题和上题又再次考查了 $V_y=2\pi\int_a^b x|y(x)|\mathrm{d}x$ 这一公式，即曲线 $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b(0\leqslant a<b)$ 及 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

3.7.3 求弧长

122 [1992—Ⅲ] 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$上相应于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$的一段弧的长度.

解 $$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-1\right)\mathrm{d}x=\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)-x\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

123 [1995—Ⅲ] 求摆线$\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}$一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的弧长 S.

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\cos t.$

因为 $$\mathrm{d}S=\sqrt{\sin^2t+(1-\cos t)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t=2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t,$$

所以 $$S=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8.$$

124 [2001] 设 $\rho=\rho(x)$是抛物线 $y=\sqrt{x}$上任一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$处的曲率半径，$s=s(x)$是抛物线上介于点$A(1,1)$与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.(在直角坐标系下曲率公式为 $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$)

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

所以抛物线在点 $M(x,y)$处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}};$$

抛物线上 $\overparen{AM}$ 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}t=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\mathrm{d}t.$$

由参数方程求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

从而

$$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2=\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

125 [2010] 当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时，对数螺线 $r=e^{\theta}$ 的弧长为________.

答 应填 $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

解 根据弧长公式得

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}(e^{\pi}-1).$$

126 [2011] 曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________.

答 应填 $\ln(1+\sqrt{2})$.

解
$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx$$
$$=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1).$$

3.7.4 求表面积

127 [1998] 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

解 设切点的横坐标为 x_0，则切点 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$，曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 在此点的切线斜率为 $\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$，于是切线方程为

$$y-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0).$$

又因它经过原点，以点(0,0)代入，得 $-2(x_0-1)=-x_0$，解得 $x_0=2$，于是切线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\frac{1}{2}x$，切点为(2,1).

由曲线段 $y=\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

由直线段 $y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_2=\int_0^2 2\pi\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\sqrt{5}\pi.$$

因此，所求旋转体的表面积为 $S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

注 求旋转体的表面积是几个几何量中考查的频率最低的一个，但是一旦出现在考卷中就会有很大的区分度，主要原因在于部分考生忽略了这个问题，没有记住公式，还有就是漏掉了第二部分面积 S_2，旋转体的表面积在 2016 考研的考卷中又一次出现了，所以大纲中要求的内容一定都要复习到.

3.7.5 与定积分几何应用有关的综合题

128 [1997] 设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续，在开区间(0,1)内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

解 由题设知，当 $x\neq 0$ 时，$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$，即 $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3a}{2}$，据此并由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连

续性,得

$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx, x\in[0,1].$$

又由已知条件得

$$2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}ax^3+\frac{C}{2}x^2\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C,$$

即

$$C=4-a,$$

因此

$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x.$$

旋转体的体积为

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi.$$

由

$$V'(a)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi=0$$

得

$$a=-5,$$

又因

$$V''(a)=\frac{\pi}{15}>0,$$

故 $a=-5$ 时,旋转体体积最小.

129 [2002] 求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$,使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线$x=1$,$x=2$以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}y=-1,$$

这是一阶非齐次线性微分方程,故直接套用公式得

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(-\int\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\frac{1}{x}+C\right)=x+Cx^2.$$

由曲线 $y=x+Cx^2$,直线 $x=1$,$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积为

$$V(C)=\int_1^2\pi(x+Cx^2)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{C}{2}x^4+\frac{C^2}{5}x^5\right)\bigg|_1^2=\pi\left(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3}\right),$$

令 $V'(C)=0$,得

$$\pi\left(\frac{62}{5}C+\frac{15}{2}\right)=0,$$

解出 $C=-\frac{75}{124}$.

又 $V''(C)=\frac{62}{5}\pi>0$,故 $C=-\frac{75}{124}$为唯一极小值点,也就是最小值点. 因此,

$$y=x-\frac{75}{124}x^2$$

为所求解.

130 [2003] 设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$过点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$,其上任一点 $P(x,y)$处的法线与 y 轴的交点为Q,且线段 PQ 被 x 轴平分.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$的方程;

(Ⅱ)已知曲线 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上的弧长为 l,试用 l 表示曲线$y=f(x)$的弧长 s.

解 (Ⅰ)曲线 $y=f(x)$在点 $P(x,y)$处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中(X,Y)为法线上任意一点的坐标. 令 $X=0$,则

$$Y=y+\frac{x}{y},$$

故 Q 点坐标为$\left(0,y+\frac{x}{y}\right)$. 由题设知

$$y+y+\frac{x}{y}=0, \text{即 } 2y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x=0,$$

积分得

$$x^2+2y^2=C,$$

由 $y\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$ 知 $C=1$,故曲线 $y=f(x)$的方程为

$$x^2+2y^2=1.$$

(Ⅱ)曲线 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上的弧长为

$$l=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\end{cases}$$

故

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

令 $\theta=\frac{\pi}{2}-t$,则

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1+\cos^2 t}(-\mathrm{d}t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{l}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}l.$$

131 [2004] 曲线 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0,x=t(t>0)$及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体,其体积为 $V(t)$,侧面积为 $S(t)$,在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(Ⅰ)求$\frac{S(t)}{V(t)}$的值;

(Ⅱ)计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}$.

解 (Ⅰ)$S(t)=\int_0^t 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x$,

$$V(t)=\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

所以$\frac{S(t)}{V(t)}=2$.

(Ⅱ)
$$F(t)=\pi y^2\Big|_{x=t}=\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=1.$$

132 [2006] 已知曲线 L 的方程为$\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}(t\geqslant 0)$.

(Ⅰ)讨论 L 的凹凸性;

(Ⅱ)过点$(-1,0)$引 L 的切线,求切点(x_0,y_0),并写出切线的方程;

(Ⅲ)求此切线与 L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 (Ⅰ)由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{t}-1,\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{t^3},$$

当 $t>0$ 时,$\frac{d^2y}{dx^2}<0$,故 L 是凸的.

(Ⅱ)因为当 $t=0$ 时,L 在对应点处的切线方程为 $x=1$,不合题意,故设切点(x_0,y_0)对应的参数为 $t_0>0$,则 L 在(x_0,y_0)处的切线方程为

$$y-(4t_0-t_0^2)=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(x-t_0^2-1).$$

令 $x=-1,y=0$,得

$$t_0^2+t_0-2=0,$$

解得 $t_0=1$ 或 $t_0=-2$(舍去).

由 $t_0=1$ 知,切点为$(2,3)$,且切线方程为 $y=x+1$.

(Ⅲ)当 $y=0$ 时,$t_1=0,t_2=4$ 知 L 与 x 轴的交点分别为$(1,0)$和$(17,0)$.故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}(x+1)dx-\int_{1}^{2}ydx\\&=\frac{9}{2}-\int_{0}^{1}(4t-t^2)d(t^2+1)=\frac{9}{2}-2\int_{0}^{1}(4t^2-t^3)dt=\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

133 [2009] 设非负函数 $y=y(x)(x\geqslant0)$满足微分方程 $xy''-y'+2=0$,当曲线 $y=y(x)$过原点时,其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2,求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

解 记 $y'=p$,则 $y''=p'$,代入微分方程,当 $x>0$ 时,

$$p'-\frac{1}{x}p=-\frac{2}{x},$$

解得

$$y'=p=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(-\frac{2}{x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}\right)dx+C_1\right]=x\left(-\int\frac{2}{x^2}dx+C_1\right)=2+C_1x,$$

因此

$$y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2(x>0).$$

由已知 $y(0)=0$,有$\lim\limits_{x\to0^+}y=0$,于是 $C_2=0$,故

$$y=2x+\frac{1}{2}C_1x^2.$$

由题意,有

$$2=\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}C_1x^2\right)dx=1+\frac{1}{6}C_1,$$

所以 $C_1=6$,因此

$$y=2x+3x^2.$$

由于

$$x=\frac{1}{3}(\sqrt{3y+1}-1),0\leqslant y\leqslant5,$$

故所求体积为

$$V=5\pi-\pi\int_0^5x^2dy=5\pi-\frac{\pi}{9}\int_0^5(\sqrt{3y+1}-1)^2dy=5\pi-\frac{13\pi}{6}=\frac{17\pi}{6}.$$

134 [2013] 设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$.

(Ⅰ)求 L 的弧长;

(Ⅱ)设 D 是由曲线 L,直线 $x=1,x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形,求 D 的形心的横坐标.

解 (Ⅰ)$y'=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$,则

$$1+y'^2=1+\frac{1}{4}\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2,$$

于是 L 的弧长

$$s=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

(Ⅱ)平面图形 D 的形心横坐标的计算公式为 $\bar{x}=\dfrac{\int_1^{\mathrm{e}}xy\,\mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}}y\,\mathrm{d}x}$,其中

$$\int_1^{\mathrm{e}}xy\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^2\ln x+\frac{1}{8}x^2\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3),$$

$$\int_1^{\mathrm{e}}y\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12},$$

所以 D 的形心的横坐标为

$$\frac{\frac{1}{16}(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3)}{\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12}}=\frac{3(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3)}{4(\mathrm{e}^3-7)}.$$

注 平面区域 D 的形心一般表达式为:$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$,$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$.

135 [2014] 设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$,$x\in[0,1]$,定义函数列:

$$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots,f_n(x)=f[f_{n-1}(x)],\cdots.$$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$,直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

解
$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{1+f_1(x)}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x};$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{1+f_2(x)}=\frac{x}{1+3x};$$

$$\cdots\cdots$$

由数学归纳法得 $f_n(x)=\frac{x}{1+nx}(n=1,2,3,\cdots)$.

于是
$$S_n=\int_0^1\frac{x}{1+nx}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}-\frac{\ln(1+n)}{n^2}.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\ln(1+n)}{n}\right]=1.$$

136 [2014] 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$,且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$,求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

解 由 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 得

$$f(x,y)=(y+1)^2+g(x).$$

又 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$,得

$$g(y)=-(2-y)\ln y,$$

因此

$$f(x,y)=(y+1)^2-(2-x)\ln x.$$

于是,曲线 $f(x,y)=0$ 的方程为

$$(y+1)^2=(2-x)\ln x(1\leqslant x\leqslant 2).$$

其所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2(y+1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}(2-x)^2\ln x+\frac{1}{4}x^2-2x+2\ln x\right]\Bigg|_1^2=\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\pi.$$

注 对于偏微分 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$,特别注意积分后不是加上任意常数 C,而是加上关于 x 的任意函数 $g(x)$.

137 [2016] 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases}x(t)=\cos^3 t,\\ y(t)=\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域,求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解 设 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V,表面积为 S,则

$$V=\frac{2}{3}\pi-\int_0^1\pi y^2(t)\mathrm{d}[x(t)]$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\pi\sin^6 t(\cos^3 t)'\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi+3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{16}{105}\pi$$

$$=\frac{18}{35}\pi,$$

$$S=2\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{16}{5}\pi.$$

3.7.6 物理应用

138 [1991—Ⅲ] 质点以速度 $t\sin t^2$ 米/秒作直线运动,则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于________米.

答 应填 $\frac{1}{2}$.

解 质点所经过的路程为

$$S=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}t\sin t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}\sin t^2\mathrm{d}t^2=-\frac{1}{2}\cos t^2\Bigg|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2}(\text{米}).$$

139 [1991—Ⅲ] 如图 1—3—16,x 轴上的一线密度为常数 μ,长度为 l 的细杆,若质量为 m 的质点到

杆右端的距离为 a，已知引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为

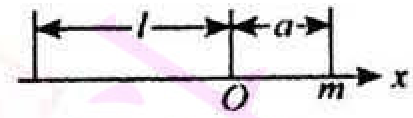


图 1—3—16

(A) $\int_{-l}^{0}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.　　(B) $\int_{0}^{l}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.　　(D) $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.

答　应选(A).

解　$\mathrm{d}F=\frac{km\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$，则 $F=\int_{-l}^{0}\frac{km\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$.

140 [1999]　为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口(如图 1—3—17). 已知井深 30 m，抓斗自重 400 N，缆绳每米重 50 N，抓斗抓起的污泥重2 000 N，提升速度为 3 m/s. 在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明：① 1 N×1 m=1 J；m，N，s，J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳. ②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

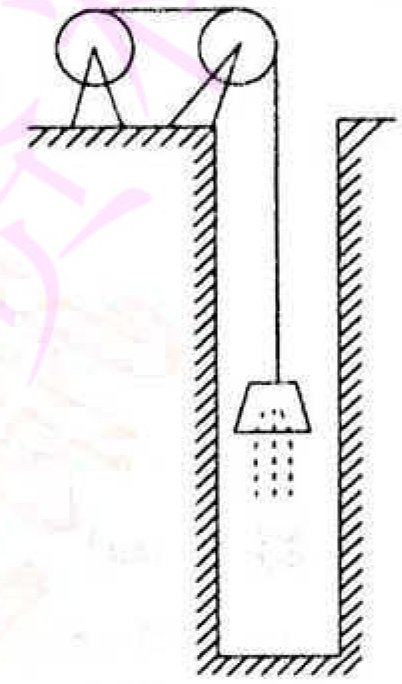


图 1—3—17

解　作 x 轴如图 1—3—18 所示，将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功

$$W=W_1+W_2+W_3,$$

其中 W_1 是克服抓斗自重所作的功；W_2 是克服缆绳重力所作的功；W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知

$$W_1=400\times 30=12\ 000(\mathrm{J}).$$

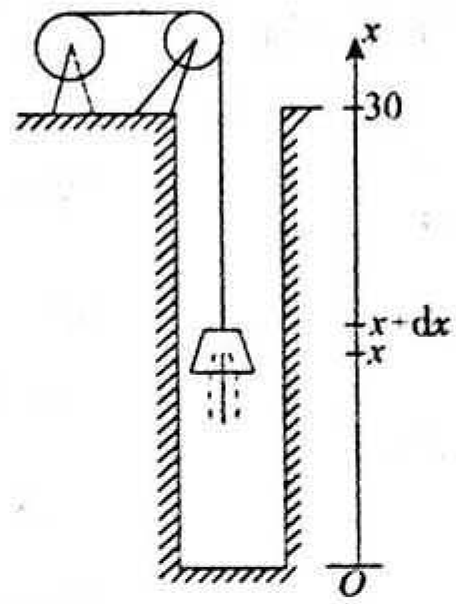


图 1—3—18

将抓斗由 x 处提升到 $x+\mathrm{d}x$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$$\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x,$$

从而　$$W_2=\int_0^{30}50(30-x)\mathrm{d}x=22\ 500(\mathrm{J}).$$

在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内提升污泥需作功为

$$\mathrm{d}W_3=3(2\ 000-20t)\mathrm{d}t,$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\frac{30}{3}=10(\mathrm{s})$，所以

$$W_3=\int_0^{10}3(2\ 000-20t)\mathrm{d}t=57\ 000(\mathrm{J}).$$

因此，共需作功

$$W=12\ 000+22\ 500+57\ 000=91\ 500(\mathrm{J}).$$

141 [2002]　某闸门的形状与大小如图 1—3—19 所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与下部承受的水压力之比为 5 : 4. 闸门矩形部分的高 h 应为多少米?

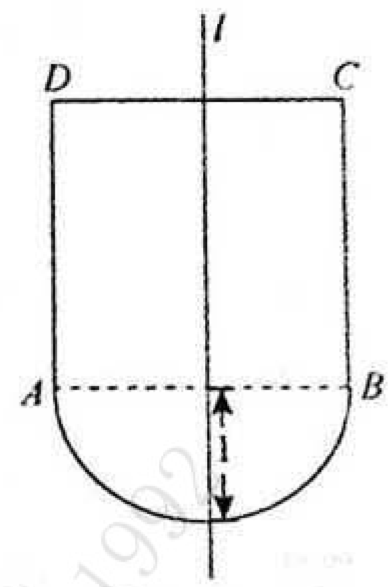


图 1—3—19

解　建立如图 1—3—20 所示的坐标系，则闸门下部边缘抛物线的方程为

$$y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

由侧压力公式知，闸门矩形部分所承受的水压力为

$$P_1=\int_1^{h+1}2\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y$$

$$=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^{h+1}$$

$$=\rho g h^2,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

同理，闸门下部承受的水压力为

$$P_2=\int_0^1 2\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y$$

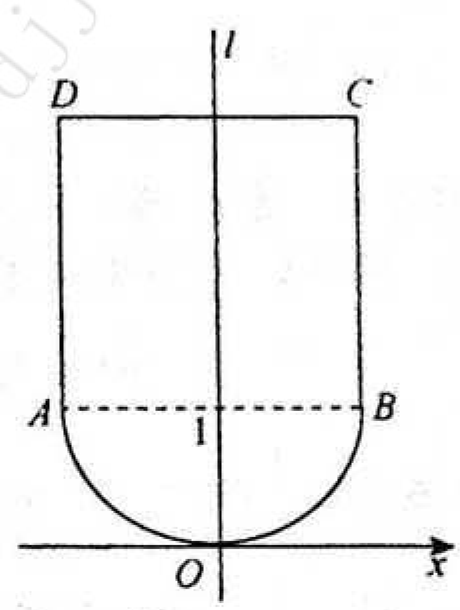


图 1—3—20

$$=2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^1$$
$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

按题意$\frac{P_1}{P_2}=\frac{5}{4}$,因而有

$$\frac{\rho g h^2}{4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\frac{5}{4},$$

即
$$3h^2-5h-2=0,$$

解之得 $h=2,h=-\frac{1}{3}$(舍去).因此闸门矩形部分的高应为 2 米.

142 [2010] 一个高为 l 的柱体形贮油罐,底面是长轴为 $2a$,短轴为 $2b$ 的椭圆.现将贮油罐平放,当油罐中油面高度为$\frac{3}{2}b$ 时(如图 1—3—21),计算油的质量.(长度单位为 m,质量单位为 kg,油的密度为常量 ρ,单位为 kg/m³.)

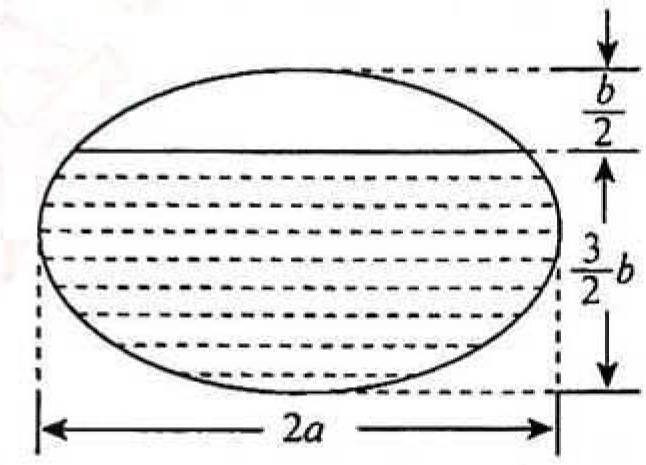


图 1—3—21

解 建立如图 1—3—22 所示的坐标系,则贮油罐底面椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.图中阴影部分为油面与椭圆所围成的图形.记 S_1 为下半椭圆面积,则$S_1=\frac{1}{2}\pi ab$.

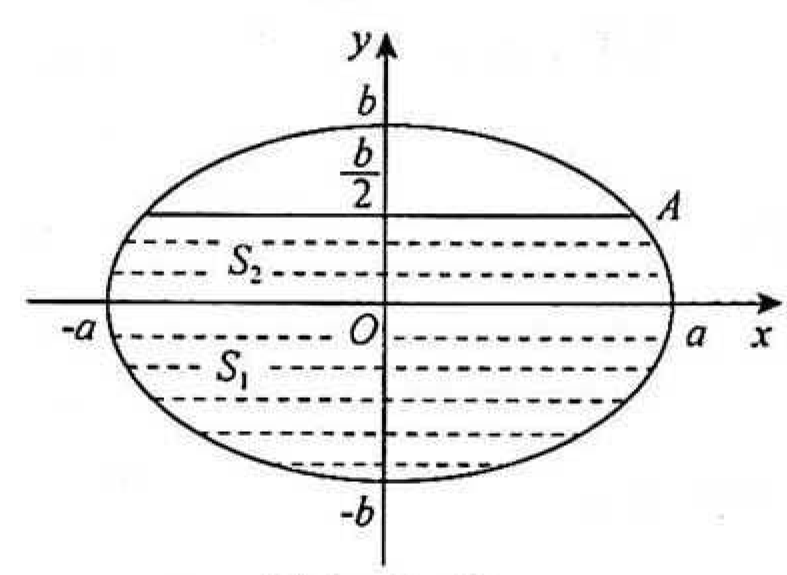


图 1—3—22

记 S_2 是位于 x 轴上方阴影部分的面积,则

$$S_2=2\int_0^{\frac{b}{2}}a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y.$$

设 $y=b\sin t$,则 $\mathrm{d}y=b\cos t\mathrm{d}t$,

$$S_2=2ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t$$
$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

于是油的质量为

$$(S_1+S_2)l\rho=\left(\frac{1}{2}\pi ab+\frac{\pi}{6}ab+\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right)l\rho=\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl\rho.$$

143 [2011] 一容器的内侧是由如图 1—3—23 中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线由 $x^2+y^2=2y(y\geqslant\frac{1}{2})$与 $x^2+y^2=1(y\leqslant\frac{1}{2})$连接而成.

(Ⅰ)求容器的容积;

(Ⅱ)若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出,至少需要做多少功?(长度单位为 m,重力加速度为 g m/s²,水的密度为 10^3 kg/m³.)

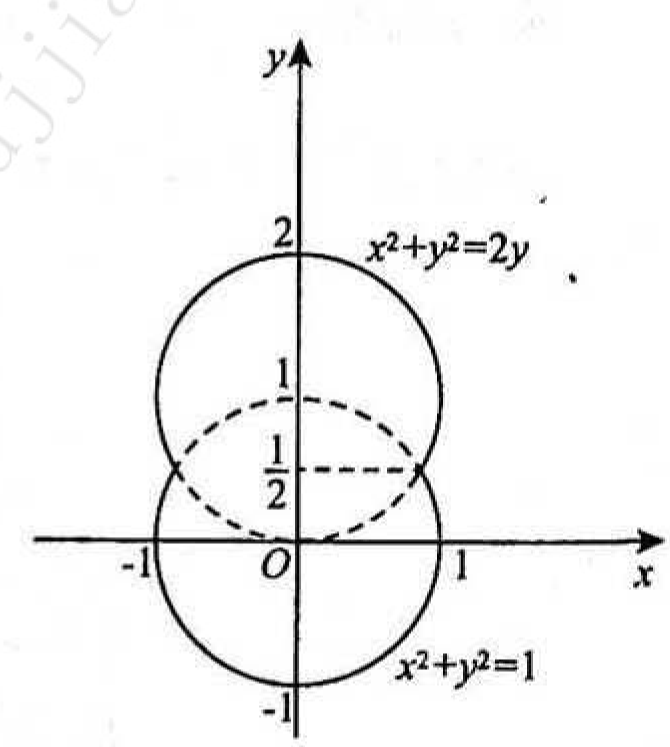


图 1—3—23

解法 1 (Ⅰ)由对称性,所求的容积为

$$V=2V_1=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}y=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{9\pi}{4},$$

即该容器的容积为$\frac{9\pi}{4}$ m³.

(Ⅱ)因为当$-1\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$时,功的微元

$$dW=10^3 g\pi(1-y^2)(2-y)dy;$$

当$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2$时，功的微元

$$dW=10^3 g\pi[1-(y-1)^2](2-y)dy,$$

故所求的功为

$$\begin{aligned}W&=10^3 g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)dy+10^3 g\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[1-(y-1)^2](2-y)dy\\&=10^3\pi g\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y-2y^2+y^3)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4y-4y^2+y^3)dy\right]\\&=10^3\pi g\left[\left(2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left(2y^2-\frac{4}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\right]=\frac{27\times 10^3}{8}\pi g,\end{aligned}$$

即所求的功为$\frac{27\times 10^3}{8}\pi g$ J.

解法2　(Ⅰ)所求的容积为

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)dy\\&=\pi\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+\pi\left(y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9\pi}{4},\end{aligned}$$

即该容器的容积为$\frac{9\pi}{4}$ m^3.

(Ⅱ)同解法1.

144 [2014]　一根长度为1的细棒位于x轴的区间$[0,1]$上，若其线密度$\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标$\bar{x}=$________.

答　应填$\frac{11}{20}$.

解　质心坐标 $\bar{x}=\dfrac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1\rho(x)dx}=\dfrac{\int_0^1(-x^3+2x^2+x)dx}{\int_0^1(-x^2+2x+1)dx}=\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\dfrac{11}{20}$.

3.8　积分有关的证明题

145 [1988－Ⅲ]　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，且$m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(1)求$\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$;

(2)证明$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right|\leqslant M-m\ (a>0)$.

(1)**解**　由积分中值定理和微分中值定理有

$$\begin{aligned}&\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]\\&=\lim_{a\to 0^+}f'(\xi^*)=\lim_{\xi^*\to 0}f'(\xi^*)=f'(0)\ (-2a\leqslant\xi-a<\xi^*<\xi+a\leqslant 2a).\end{aligned}$$

(2)**证**　由$f(x)$的有界性及积分估值定理有

$$m\leqslant\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt\leqslant M.$$

又

$$-M\leqslant -f(x)\leqslant -m,$$

故有

$$-(M-m)\leqslant\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\leqslant M-m,$$

即

$$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|\leqslant M-m.$$

146 [1993—Ⅲ] 设 $f'(x)$在$[0,a]$上连续,且 $f(0)=0$,证明:$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{Ma^2}{2}$,其中$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

证法 1 任取 $x\in(0,a]$,由微分中值定理有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\xi\in(0,x).$$

又因 $f(0)=0$,故 $f(x)=f'(\xi)x,x\in(0,a]$,于是

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^a f'(\xi)x\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|f'(\xi)|x\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^a x\mathrm{d}x=\frac{M}{2}a^2.$$

证法 2 设 $x\in[0,a]$,由 $f(0)=0$ 知

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(0)=f(x),$$

于是

$$|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x M\mathrm{d}t=Mx,$$

故

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a Mx\mathrm{d}x=\frac{Ma^2}{2}.$$

注 对积分$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|$作估计,只要对被积函数 $f(x)$ 作估计即可.条件中给出导数 $f'(x)$ 及 $f(0)=0$ 的信息,自然想办法把 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 联系起来,在高等数学中,联系 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的常用的有两种办法,一是微分学中的拉格朗日中值定理(证法 1),二是积分学中的牛顿—莱布尼茨公式(证法 2).

147 [1994—Ⅲ] 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续且递减,证明:当 $0<\lambda<1$ 时,$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证法 1

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_\lambda^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=(1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_\lambda^1 f(x)\mathrm{d}x=(1-\lambda)\lambda f(\xi_1)-\lambda(1-\lambda)f(\xi_2)\\&=\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1)-f(\xi_2)],\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant\xi_1\leqslant\lambda\leqslant\xi_2\leqslant1$. 因 $f(x)$ 递减,则有 $f(\xi_1)\geqslant f(\xi_2)$.

又 $\lambda>0,1-\lambda>0$,所以 $\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geqslant0$,即原不等式成立.

证法 2

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_\lambda^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=(1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_\lambda^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=(1-\lambda)\lambda f(\xi_1)-\lambda(1-\lambda)f(\xi_2)\\&=\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1)-f(\xi_2)],\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant\xi_1\leqslant\lambda\leqslant\xi_2\leqslant1$,而 $f(x)$在$[0,1]$上递减,知 $f(\xi_1)-f(\xi_2)\geqslant0$,又 $0<\lambda<1,0<1-\lambda<1$,从而

$$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant0,$$

即

$$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

148 [2000] 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$.

（Ⅰ）当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明：$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

（Ⅰ）证 因为 $|\cos x|\geqslant 0$，且当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数，在每个周期上积分值相等，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2(n+1).$$

因此，当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有

$$2n\leqslant S(x)<2(n+1).$$

（Ⅱ）解 由（Ⅰ）知，当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x\to+\infty$，由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

149 [2000] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证 令
$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\ 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

则有 $F(0)=0,F(\pi)=0$. 又因为

$$0=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

所以存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi=0$. 若不然，则在 $(0,\pi)$ 内 $F(x)\sin x$ 恒为正或 $F(x)\sin x$ 恒为负，均与 $\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=0$ 矛盾. 但当 $\xi\in(0,\pi)$ 时，$\sin\xi\neq0$，故 $F(\xi)=0$.

由上证得 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0\ (0<\xi<\pi)$.

再对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔中值定理，知至少存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

注 直接证明方程有根遇到困难时，转而想到对它的原函数使用罗尔定理来说明根的存在性. 但从答题的情况来看部分考生只是笼统地说 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，而并没有具体引入变限积分函数作为一个确定的原函数，以至于还是不能顺利完成证明，这说明部分考生还不习惯用变限积分函数来表示一个具体的原函数. 当然本题有一定的难度，这也是 2000 年数学一、二、三、四试卷中最难的一道题目.

150 [2008] （Ⅰ）证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$；

（Ⅱ）若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

证 （Ⅰ）设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\ x\in[a,b].$$

由定积分性质，有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

即

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M,$$

由连续函数介值定理知，至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\eta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a).$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)的结论，可知至少存在一点 $\eta\in[2,3]$，

$$\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta).$$

又由 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\eta)$ 知，$2<\eta\leqslant 3$.

对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 和 $[2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$，得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0,1<\xi_1<2,$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0,2<\xi_2<\eta\leqslant 3.$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3).$$

注 “加强形式的积分中值定理”设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b).$$

你会证明吗?提示:利用牛顿—莱布尼茨公式和拉格朗日中值定理.

151 [2014] 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明:

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b]$;

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证 (Ⅰ)因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，所以当 $x\in[a,b]$ 时，有 $\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$，即

$$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a.$$

(Ⅱ)令 $F(x)=\int_a^{a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t,x\in[a,b]$.

因为 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且

$$F'(x)=\left\{f\left[a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u\right]-f(x)\right\}g(x).$$

由(Ⅰ)知，$a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u\leqslant x$，又因为 $f(x)$ 单调增加，且 $g(x)\geqslant 0$，所以 $F'(x)\leqslant 0$，从而 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调减少.

又 $F(a)=0$，故 $F(b)\leqslant 0$，即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

注　本题是一道综合题，考查的内容包括定积分的性质、变限积分函数的性质及其求导、利用函数单调性证明不等式的方法，显然结论（Ⅰ）是为结论（Ⅱ）的证明做铺垫的；结论（Ⅱ）从形式上看很"唬人"，不少考生望而止步，不知如何下手，所以（Ⅱ）的得分率较低．其实如果稍加冷静分析，就能够认识到 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 就是两个和 a,b 有关的数，要比较他们的大小，就是如同微分中的"常数不等式"转化为"函数不等式"一样，只需令 a 或 b 中的一个改为变量 x 即可．

152 [2016]　已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值；

（Ⅱ）证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

（Ⅰ）解　$f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值

$$\begin{aligned}\bar{f}&=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{3\pi}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）证　由题意，得 $f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}, x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，因为 $f'(x)<0$，所以 $f(x)<f(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内无零点，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

由积分中值定理知，存在 $x_0\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$，使得 $f(x_0)=\bar{f}=\frac{1}{3\pi}>0$，由于当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)<0$，所以 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$.

根据连续函数介值定理知，存在 $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)\subset\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，使得 $f(\xi)=0$. 又因为当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内至多只有一个零点.

综上所述，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一的零点.

注　上面讨论的后一部分也可这样做：

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3\pi}{2}\right)&=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{3\pi}{2}-t}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\pi+u}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\pi+t}\right)\sin t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>0,\end{aligned}$$

而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，并注意到 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调增加，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内有唯一零点.

第 4 章 多元函数微分学

考点分布

考点 \ 分值 \ 年份	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（04—17 年）
偏导数与全微分概念				4					4					8	16
求偏导数与全微分	14	4	12	15	4	10	15	9	4	4	4	8	4	10	117
求极值与最值		10	4		11	4		4	10		4	11	10		68
极值与最值应用题										10					10

2004—2017 年

注：1987—2003 年未考多元函数微分内容

4.1 基本概念

考点综述

多元函数微分学中的主要概念有：二重极限、连续、可偏导、可微等，要熟悉它们之间的关系.

1. 证明二重极限不存在时的经典方法

对于二元函数 $f(x,y)$，若点 (x,y) 沿两条不同的路径趋于点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 的极限不相等，或沿某一条路径趋于点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 的极限不存在，则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

2. 偏导数

二元函数 $f(x,y)$ 在某点的偏导数实际上就是相应的一元函数的导数，故在某些场合下求某一点的偏导数除可用定义法外，有时采用先代后求的方法会更方便：

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\bigg|_{x=x_0}=\cdots.$$

而求 $f''_{xy}(x_0,y_0)$，可先求 $f'_x(x,y)$，再把 $x=x_0$ 代入 $f'_x(x,y)$ 得一元函数 $f'_x(x_0,y)$，进而

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f'_x(x_0,y)\bigg|_{y=y_0}=\cdots.$$

有时注意利用混合偏导连续时与求导次序无关这一性质，采取交换求导次序的方法可简化二阶混合偏导的计算.

3. 可微

按照定义考查 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处是否可微，即考查二重极限：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

是否为0,其等价的形式是:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-[f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

是否为0.

1 [2007]　二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,且 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$,且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

答　应选(C).

解　二元函数在一点连续、可导、可微和偏导数连续的概念以及它们的相互关系是多元函数微分学的基本内容,这些就是本题要考查的知识点.只要了解各选项中等式的意义,就会得到正确的选项.本题主要利用基本概念和推理,所以有一定的难度.

选项(A)的等式是函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续的定义,故它不是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分条件;

选项(B)的两个等式就是 $f_x'(0,0)=0$,$f_y'(0,0)=0$,两个偏导数存在当然不是可微的充分条件;

选项(C)的等式就是函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的定义,故是正确的;

由于(C)是正确的选项,故选项(D)被排除.也可举反例:

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & xy=0,\\ 1, & xy\neq 0,\end{cases}$$

因为

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,$$

$$f_x'(x,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,0)-f(x,0)}{\Delta x}=0,$$

故

$$\lim_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0,$$

同理

$$\lim_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0.$$

但是在点 $(0,0)$ 处,有

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=1,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0,$$

故函数在 $(0,0)$ 处不可微.

注　注意选项(D)中表示的极限是一元函数的极限,分别表示一元函数 $f_x'(x,0)$ 在 $x=0$ 处与 $f_y'(0,y)$ 在 $y=0$ 处连续,不要误以为是表示一阶偏导连续.

2 [2012]　设函数 $f(x,y)$ 可微,且对任意的 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$.　(B) $x_1>x_2,y_1>y_2$.　(C) $x_1<x_2,y_1<y_2$.　(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$.

答　应选(D).

解　由于 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,故对于固定的 y,$f(x,y)$ 是关于 x 单调增加的函数;同理,由于 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,可

知对于固定的 x,$f(x,y)$是关于 y 单调减少的函数.因此,当 $x_1<x_2$ 且 $y_1>y_2$ 时,就有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$,故应选(D).

3 [2017] 设 $f(x,y)$具有一阶偏导数,且对任意的(x,y)都有$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则

(A) $f(0,0)>f(1,1)$. (B) $f(0,0)<f(1,1)$.

(C) $f(0,1)>f(1,0)$. (D) $f(0,1)<f(1,0)$.

答 应选(D).

解 由$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$知,$f(x,y)$关于 x 单调递增,则

$$f(1,y)>f(0,y).$$

由$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$知,$f(x,y)$关于 y 单调递减,则

$$f(x,0)>f(x,1).$$

综合以上两个不等式,有

$$f(1,0)>f(0,0)>f(0,1).$$

应选(D).

4 [2017] 设函数 $f(x,y)$具有一阶连续偏导数,且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$,$f(0,0)=0$,则 $f(x,y)=$________.

答 应填 $xy\mathrm{e}^y$.

解 由题知$\frac{\partial f}{\partial x}=y\mathrm{e}^y$,$\frac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)\mathrm{e}^y$,利用偏积分有

$$f(x,y)=\int y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x=xy\mathrm{e}^y+\varphi(y),$$

则$\frac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)\mathrm{e}^y+\varphi'(y)=x(1+y)\mathrm{e}^y$,得 $\varphi'(y)=0$,有 $\varphi(y)=C$.

因而 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y+C$,由 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$,故 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y$.

4.2 求偏导与全微分

4.2.1 求带有抽象函数记号的复合函数的偏导数与全微分

考点点睛

链式求导法则:

(1)复合函数的中间变量均为一元函数的情形.

设 $z=f(u,v)$,$u=\varphi(t)$,$v=\psi(t)$,则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$,且$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

(2)复合函数的中间变量均为多元函数的情形.

设 $z=f(u,v)$,$u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$,则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(3)复合函数的中间变量既有一元函数,又有多元函数的情形.

设 $z=f(u,v)$,$u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(y)$,则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

无论 z 对谁求导,也无论 z 已经求了几次导,求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构,最后注意书写规范.

5 [2004]　设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

答　应填 2.

解法 1　等式两端对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

同理得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

于是

$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3\times 2e^{2x-3z}+2}{1+3e^{2x-3z}}=2.$$

解法 2　等式两端直接求全微分，

$$dz=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy\Rightarrow dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy,$$

于是

$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3\times 2e^{2x-3z}+2}{1+3e^{2x-3z}}=2.$$

6 [2004]　设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot xe^{xy}]+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'+ye^{xy}[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot xe^{xy}]\\&=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''+e^{xy}(1+xy)f_2'.\end{aligned}$$

7 [2005]　设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

答　应选(B).

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

比较得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

8 [2007]　设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

答　应填 $2\left(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'\right)$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y},\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),$$
$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[\left(-\frac{y}{x^2}\right)f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right]-y\left[\frac{1}{x}f_1'+\left(-\frac{x}{y^2}\right)f_2'\right]$$
$$=2\left(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'\right).$$

注 还可以利用一阶全微分形式不变性求解,留给读者自练.

9 [2008] 设函数 f 连续,若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图 1—4—1 中阴影部分,则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$

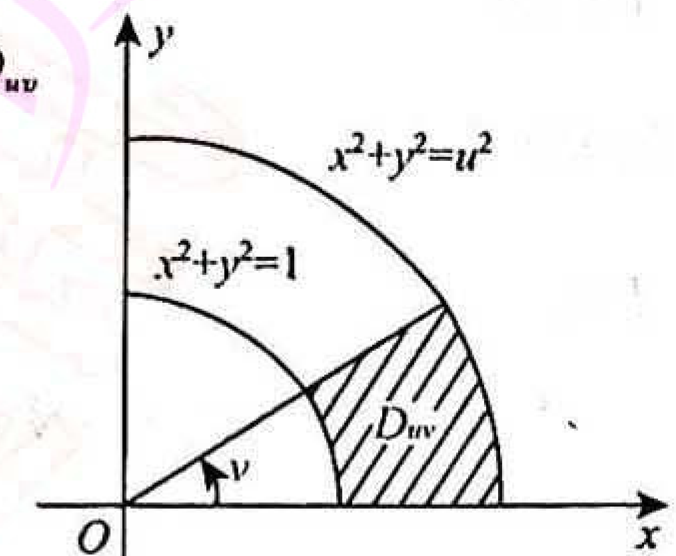


图 1—4—1

(A) $vf(u^2)$. (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$. (D) $\frac{v}{u}f(u)$.

答 应选(A).

解 因为
$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^v\mathrm{d}\theta\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}r\mathrm{d}r=v\int_1^u f(r^2)\mathrm{d}r,$$
故
$$\frac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2).$$

10 [2008] 设 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

答 应填 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

解法 1 因为
$$z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}(\ln y-\ln x)},\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y}\right),$$
故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1).$$

解法 2 采用“先代后求”.
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z(x,2)\right|_{x=1}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right|_{x=1}=\left.\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\ln\frac{2}{x}}\right)'\right|_{x=1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1).$$

11 [2009] 设 $z=f(x+y,x-y,xy)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 由于
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3',\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3',$$
所以
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(f_1'+f_2'+yf_3')\mathrm{d}x+(f_1'-f_2'+xf_3')\mathrm{d}y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x+$$
$$f_3'+y[f_{31}''\cdot 1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x]$$
$$=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''.$$

12 [2011]　设函数 $z=f[xy,yg(x)]$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解法 1　因为 $z=f[xy,yg(x)]$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[xf_{11}''+g(x)f_{12}'']+g'(x)f_2'+yg'(x)[xf_{21}''+g(x)f_{22}''].$$

由题意 $g(1)=1,g'(1)=0$，所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

解法 2　根据题意，有 $g(1)=1,g'(1)=0$.

因为 $z=f[xy,yg(x)]$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

从而

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=yf_1'(y,y),$$

所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.\left\{f_1'(y,y)+y[f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)]\right\}\right|_{y=1}$$
$$=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

13 [2012]　设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

答　应填 0.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right),$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'-f'=0.$$

14 [2013]　设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) $2yf'(xy)$.　　(B) $-2yf'(xy)$.　　(C) $\dfrac{2}{x}f(xy)$.　　(D) $-\dfrac{2}{x}f(xy)$.

答　应选(A).

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot y=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot x=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy),$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)+\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)=2yf'(xy),$$

故选(A).

15 [2015]　设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是

(A) $\dfrac{1}{2},0$.　　(B) $0,\dfrac{1}{2}$.　　(C) $-\dfrac{1}{2},0$.　　(D) $0,-\dfrac{1}{2}$.

答　应选(D).

解法 1　先求出 $f(u,v)$.

$$令\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u}{1+v},\\ y=\dfrac{uv}{1+v},\end{cases}$$

于是 $$f(u,v)=\frac{u^2}{(1+v)^2}-\frac{u^2v^2}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}=u^2\left(\frac{2}{1+v}-1\right),$$

因此 $$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(1,1)}=2u\left(\frac{2}{1+v}-1\right)\bigg|_{(1,1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,1)}=-\frac{2u^2}{(1+v)^2}\bigg|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}.$$

解法 2 不必先求出 $f(u,v)$.

由 $\begin{cases}x+y=1,\\ \frac{y}{x}=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $(u,v)=(1,1)$ 对应 $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

现对 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ 两端分别对 x,y 求偏导数得

$$\frac{\partial f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)}{\partial u}+\frac{\partial f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=2x,$$

$$\frac{\partial f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)}{\partial u}+\frac{\partial f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)}{\partial v}\left(\frac{1}{x}\right)=-2y,$$

上两式中令 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 得

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(1,1)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,1)}\cdot(-2)=1,\\ \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(1,1)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,1)}\cdot 2=-1,\end{cases}$$

由此解出 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(1,1)}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$. 选(D).

16 [2016] 已知函数 $f(x,y)=\frac{e^x}{x-y}$,则

(A) $f'_x-f'_y=0$.　　(B) $f'_x+f'_y=0$.

(C) $f'_x-f'_y=f$.　　(D) $f'_x+f'_y=f$.

答 应选(D).

解 直接计算,

$$f'_x=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2},f'_y=\frac{e^x}{(x-y)^2},$$

因而 $$f'_x+f'_y=\frac{e^x}{x-y}=f.$$

选(D).

17 [2017] 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$y=f(e^x,\cos x)$,求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0},\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解 因为 $y=f(e^x,\cos x)$,所以

$$\frac{dy}{dx}=f'_1e^x-f'_2\sin x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f'_1e^x+(f''_{11}e^x-f''_{12}\sin x)e^x-f'_2\cos x-(f''_{21}e^x-f''_{22}\sin x)\sin x.$$

当 $x=0$ 时,$u=e^0=1,v=\cos 0=1$,所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'_1(1,1),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)-f_2'(1,1).$$

4.2.2 求隐函数的偏导数与全微分

> 求隐函数的偏导数常用的方法有三种：
> (1)方程(组)两端直接求偏导数，此时注意自变量与因变量.
> (2)利用公式法，此时 x,y,z 的地位平等(不考虑谁是自变量谁是因变量).
> (3)利用一阶全微分形式不变性.

18 [2010] 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x. (B) z. (C) $-x$. (D) $-z$.

答 应选(B).

解 在等式 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两端关于 x 求偏导，得

$$-\frac{y}{x^2}F_1'+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{x}-z\frac{1}{x^2}\right)F_2'=0, \qquad ①$$

在等式 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两端关于 y 求偏导，得

$$\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}F_2'=0, \qquad ②$$

①$\times x^2+$②$\times xy$ 得

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)F_2'=zF_2',$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$. 即正确选项为(B).

注 还可以利用一阶全微分形式不变性求解，留给读者自练.

19 [2014] 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$______.

答 应填 $-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$.

解 先求 $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 在原方程中令 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 得 $e^z+z=1\Rightarrow z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$.

解法1 设 $F(x,y,z)=e^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}$，$F_x'=1$，$F_y'=2ze^{2yz}+2y$，$F_z'=2ye^{2yz}+1$，当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，$z=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{1}{2}$，所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$.

解法2 将原方程两端直接求全微分，得

$$e^{2yz}(2z\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}z)+\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0,$$

当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，$z=0$，代入得 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$.

20 [2015] 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=$______.

答 应填 $-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y$.

解 先求 $z(0,0)$. 在原方程中令 $x=0,y=0$ 得

$$e^{3z(0,0)}=1\Rightarrow z(0,0)=0.$$

解法 1 将原方程两端求全微分得

$$e^{x+2y+3z}\mathrm{d}(x+2y+3z)+\mathrm{d}(xyz)=0,$$

即

$$e^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=0,$$

令 $x=0,y=0,z=0$ 得

$$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=0,$$

则

$$\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

解法 2 将方程两端对 x 求偏导数得

$$e^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

令 $x=0,y=0,z=0$ 可得 $1+3\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0$,即$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}$;

将方程两端对 y 求偏导数得

$$e^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

令 $x=0,y=0,z=0$ 可得 $2+3\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$,即$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}$.

因此

$$\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

4.3 变量代换下方程的化简

21 [2006] 设函数 $f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ)若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$的表达式.

(Ⅰ)证 由 $z=f(u),u=\sqrt{x^2+y^2}$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

所以根据题设条件可得 $f''+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot f'=0$,即

$$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$$

(Ⅱ)解 由(Ⅰ)及 $f'(1)=1$,得 $f'(u)=\frac{1}{u}$,所以 $f(u)=\ln u+C$. 由 $f(1)=0$,得 $C=0$,因此 $f(u)=\ln u$.

22 [2010] 设函数 $u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数,且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 确定 a,b 的值,使等式在变换 $\zeta=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=0$.

解
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \zeta}+b\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将以上各式代入原等式，得
$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

由题意，令
$$\begin{cases}5a^2+12a+4=0,\\5b^2+12b+4=0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}a=-2,\\b=-\frac{2}{5};\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-2;\end{cases}\begin{cases}a=-2,\\b=-2;\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-\frac{2}{5}.\end{cases}$$

由 $10ab+12(a+b)+8\neq0$，舍去$\begin{cases}a=-2,\\b=-2,\end{cases}\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-\frac{2}{5}.\end{cases}$

故 $a=-2,b=-\frac{2}{5}$ 或 $a=-\frac{2}{5},b=-2$.

23 [2014]　设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}.$$
若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$可化为
$$f''(e^x\cos y)e^{2x}=[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y]e^{2x},$$
所以函数 $f(u)$ 满足方程
$$f''(u)=4f(u)+u.$$
解得通解为
$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}.$$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$，得$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0.\end{cases}$ 解得 $C_1=\frac{1}{16},C_2=-\frac{1}{16}$. 故
$$f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u).$$

注　变量代换下方程的化简常见的有两种情形：

(1)设 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 是 $z=f(u,v)$ 与 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 复合而成，作为 x,y 的函数满足某偏微分方程，在变量代换 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 下可变化为相应的 $z=f(u,v)$ 作为 u,v 的函数所满足

的简单形式的偏微分方程,甚至可以求解,如22题.

(2)设 $z=f[u(x,y)]$ 是 $z=f(u)$ 与 $u=u(x,y)$ 复合而成,作为 x,y 的函数满足某偏微分方程,在变量代换 $u=u(x,y)$ 下可变化为相应的 $z=f(u)$ 作为 u 的函数所满足的常系数线性微分方程,进而求解该常微分方程,如21和23题.

4.4 求极值与最值

4.4.1 求无条件极值

考点点睛

主要有二元显函数与隐函数两大类.先用必要条件找出可能的极值点,再用充分条件判断是否是极值点,若为极值点,是极大值点还是极小值点,进而求出极值.

24 [2009] 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$,则点(0,0)

(A)不是 $f(x,y)$ 的连续点.　　(B)不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C)是 $f(x,y)$ 的极大值点.　　(D)是 $f(x,y)$ 的极小值点.

答 应选(D).

解 由 $dz=xdx+ydy$,可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\frac{\partial z}{\partial y}=y,$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1.$$

在点(0,0)处,因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0,B^2-AC=-1<0,A>0,$$

所以(0,0)为函数 $z=f(x,y)$ 的极小值点,即选项(D)正确.

注 $dz=xdx+ydy=d\left(\frac{1}{2}x^2\right)+d\left(\frac{1}{2}y^2\right)=d\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)$,故 $z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+C$,其中 C 是任意常数,由极值的定义可知,点(0,0)是极小值点.

25 [2011] 设函数 $f(x)$,$g(x)$ 均有二阶连续导数,满足 $f(0)>0,g(0)<0$,且 $f'(0)=g'(0)=0$,则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点(0,0)处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0$.　　(B) $f''(0)<0,g''(0)<0$.

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0$.　　(D) $f''(0)>0,g''(0)<0$.

答 应选(A).

解 由 $z=f(x)g(y)$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y),\frac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y),$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=f''(0)g(0),B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=f'(0)g'(0)=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=f(0)g''(0).$$

由于

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)g(0)=0,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)g'(0)=0,f(0)>0,g(0)<0,$$

显然只有当 $f''(0)<0,g''(0)>0$ 时,$B^2-AC<0$,且 $A>0$,即此时 $z=f(x)g(y)$ 在点(0,0)处取得极小值.

因此选项(A)是正确的.

26 [2012]　求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解　由 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$,得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

令$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,\end{cases}$解得驻点$(1,0),(-1,0)$.

记
$$A=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
$$B=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=y(x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
$$C=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

在点$(1,0)$处,由于 $B^2-AC=-\frac{2}{e}<0,A=-\frac{2}{\sqrt{e}}<0$,所以 $f(1,0)=\frac{1}{\sqrt{e}}$为 $f(x,y)$的极大值;在点$(-1,0)$处,由于 $B^2-AC=-\frac{2}{e}<0,A=\frac{2}{\sqrt{e}}>0$,所以$f(-1,0)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$为 $f(x,y)$的极小值.

注　本题是求解二元函数的无条件极值,先用必要条件找出可能的极值点,然后再用充分判别法判定是否是极值点,是极大值点还是极小值点.当然这里有一定的运算量,这类问题不难,但一定要计算快速、准确!

27 [2015]　已知函数 $f(x,y)$满足

$$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x,f'_x(x,0)=(x+1)e^x,f(0,y)=y^2+2y,$$

求 $f(x,y)$的极值.

解　由 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$,得

$$f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+\varphi(x).$$

因为 $f'_x(x,0)=(x+1)e^x$,所以

$$e^x+\varphi(x)=(x+1)e^x,$$

得 $\varphi(x)=xe^x$,从而

$$f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x.$$

对 x 积分得
$$f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+\psi(y),$$
因为 $f(0,y)=y^2+2y$,所以 $\psi(y)=0$,从而

$$f(x,y)=(x+y^2+2y)e^x.$$

于是 $f'_y(x,y)=(2y+2)e^x,f''_{xx}(x,y)=(x+y^2+2y+2)e^x,f''_{yy}(x,y)=2e^x$.

令 $f'_x(x,y)=0,f'_y(x,y)=0$,得驻点$(0,-1)$,所以

$$A=f''_{xx}(0,-1)=1,B=f''_{xy}(0,-1)=0,C=f''_{yy}(0,-1)=2.$$

由于 $B^2-AC<0,A>0$,所以极小值为 $f(0,-1)=-1$.

28 [2016]　已知函数 $z=z(x,y)$由方程$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定,求 $z=z(x,y)$的极值.

解　在$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 两端分别对 x 和 y 求偏导数,得

$$\begin{cases}2xz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2=0,\\ 2yz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+2=0.\end{cases}\qquad ①$$

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$,得
$$\begin{cases}x=-\frac{1}{z},\\ y=-\frac{1}{z},\end{cases}$$

将$\begin{cases}x=-\frac{1}{z},\\ y=-\frac{1}{z}\end{cases}$代入方程$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$,得$\ln z-\frac{2}{z}+2=0$,可知$z=1$,从而$\begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}$

对①中两式两端分别再对x,y求偏导数,得
$$\begin{cases}2z+4x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\ 2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\ 2z+4y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\end{cases}$$

从而$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-1,-1)}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3}.$

由于$AC-B^2>0,A<0$,所以$z(-1,-1)=1$是$z(x,y)$的极大值.

4.4.2 求边界上的最值

29 [2006] 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数,且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$.已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点,下列选项正确的是

(A)若$f_x'(x_0,y_0)=0$,则$f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B)若$f_x'(x_0,y_0)=0$,则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C)若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D)若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

答 应选(D).

解 设
$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

由已知,点(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值点,故有
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}\Big|_{(x_0,y_0)}=\varphi(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

由于$\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$,故可得
$$f_x'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}=0.\qquad (*)$$

将四个选项逐一讨论:若$f_x'(x_0,y_0)=0$,由(*)式知,$f_y'(x_0,y_0)$可以为0,也可以不为0,所以选项(A)与(B)都不是必然的;若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)$一定不为0,故选项(C)错误,应选(D).

30 [2008] 求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大值与最小值.

解 作拉格朗日函数
$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4),$$

令
$$\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ F'_\mu=x+y+z-4=0, \end{cases}$$

解方程组得

$$(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2),(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8).$$

故所求的最大值为 72,最小值为 6.

31 [2013] 求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

解 设 (x,y) 为曲线上的任一点,目标函数为距离的平方 $f(x,y)=x^2+y^2$,构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1).$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+(3x^2-y)\lambda=0, \quad ①$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+(3y^2-x)\lambda=0, \quad ②$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0. \quad ③$$

当 $x>0,y>0$ 时,由①,②得

$$\frac{x}{y}=\frac{3x^2-y}{3y^2-x},\text{即 } 3xy(y-x)=(x+y)(x-y),$$

得 $y=x$ 或 $3xy=-(x+y)$(由于 $x>0,y>0$,舍去).

将 $y=x$ 代入③得

$$2x^3-x^2-1=0,\text{即}(x-1)(2x^2+x+1)=0,$$

解得 $x=1$,从而点 $(1,1)$ 为唯一可能的极值点.

又 $x=0$ 时,$y=1$;$y=0$ 时,$x=1$. 分别计算点 $(1,1)$,$(0,1)$ 及 $(1,0)$ 处的目标函数值,有

$$f(1,1)=2,f(0,1)=f(1,0)=1,$$

故所求最长距离为 $\sqrt{2}$,最短距离为 $\sqrt{1}=1$.

4.4.3 求闭区域上的最值

32 [2005] 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解 由 $dz=2xdx-2ydy$ 可知

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+C,$$

再由 $f(1,1)=2$,得 $C=2$,故

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+2.$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0,\frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$,解得驻点 $(0,0)$.

在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上,$z=x^2-(4-4x^2)+2$,即

$$z=5x^2-2(-1\leqslant x\leqslant1),$$

其最大值为 $z\Big|_{x=\pm1}=3$,最小值为 $z\Big|_{x=0}=-2$,再与 $f(0,0)=2$ 比较,可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3,最小值为 -2.

注 在边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的最值也可以直接利用拉格朗日乘数法，令

$$F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right),$$

由 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0\end{cases}$ 得出 $M_1(0,2),M_2(0,-2),M_3(1,0),M_4(-1,0)$. 此时 $f(M_1)=f(M_2)=-2,f(M_3)=f(M_4)=3$，故边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的最大值是 3，最小值是 -2.

33 [2014] 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得.

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得.

答 应选(A).

解 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，所以 $u(x,y)$ 在 D 内必然有最大值和最小值. 并且如果在内部存在驻点 (x_0,y_0)，也就是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，在这个点处 $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

由条件，可知 $B^2-AC>0$，显然 $u(x_0,y_0)$ 不是极值，当然也不是最值，所以 $u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上，所以应选(A).

第 5 章　二重积分

考点分布

考点＼分值＼年份	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（04—17 年）
二重积分	4	13	14	15	15	14	14	15	14	14	10	14	10	15	181

2004—2017 年

注:1987—2003 年未考二重积分内容

5.1　二重积分的概念与性质

考点点睛

二重积分的性质主要有不等式性质与等式性质：

1. 不等式性质

(1) 设 $f(x,y)$,$g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,$f(x,y)\leqslant g(x,y)$ 且 $f(x,y)\not\equiv g(x,y)$,$(x,y)\in D$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续且非负,D_0 是 D 的子区域,且 $f(x,y)$ 在 D_0 外不恒为 0,则

$$\iint_{D_0} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 等式性质

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(D_1\cup D_2=D,D_1\cap D_2=\varnothing);$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)A_D,(\xi,\eta)\in D,A_D \text{ 是 } D \text{ 的面积}.$$

1 [1991—Ⅲ]　设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$,$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角区域,D_1 是 D 在第一象限的部分,则 $\iint_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(B) $2\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D) 0.

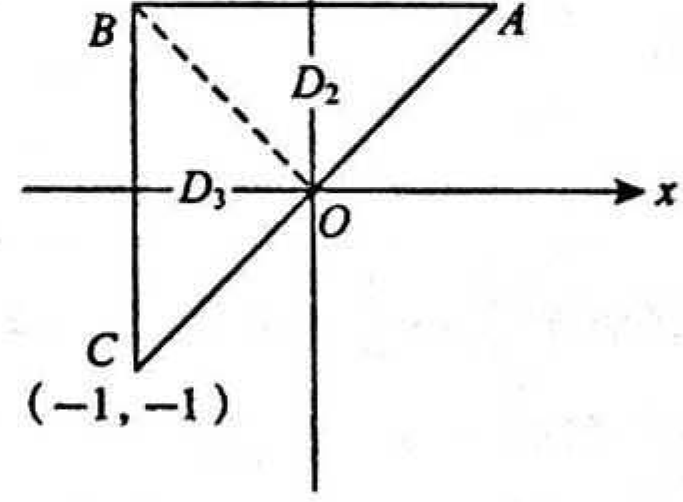


图 1—5—1

答　应选(A).

解　如图 1—5—1 所示,$\triangle OAB$ 所围区域记为 D_2,$\triangle OBC$ 所围区域记为 D_3.

由于 xy 关于 x 是奇函数,积分域 D_2 关于 y 轴对称,则

$$\iint_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

同理 $\iint_{D_4} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 从而 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

又 $\cos x\sin y$ 是 y 的奇函数,D_3 关于 x 轴对称,则

$$\iint_{D_3}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

又 $\cos x\sin y$ 是 x 的偶函数,D_2 关于 y 轴对称,则

$$\iint_{D_2}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而有

$$\iint_D\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $$\iint_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2 [2010] $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$. (B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$. (D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

答 应选(D).

解 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,记 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$.

用直线 $x=x_i=\dfrac{i}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$与 $y=y_j=\dfrac{j}{n}(j=0,1,2,\cdots,n)$将 D 分成 n^2 等份,和式

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{(1+x_i)(1+y_j^2)}\frac{1}{n^2}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)}\frac{1}{n^2}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$$

是函数 $f(x,y)$在 D 上的一个二重积分的和式,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\iint_D\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

注 本题主要考查二重积分的概念与将和式转化为积分和的方法,是一道基本概念题.

3 [2012] 设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\dfrac{\pi}{2},y=1$ 围成,则 $\iint_D(xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A)π. (B)2. (C)-2. (D)$-\pi$.

答 应选(D).

解法 1

$$\iint_D(xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^1(xy^5-1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{6}xy^6-y\right)\Big|_{\sin x}^1\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}x\sin^6x-1+\sin x\right)\mathrm{d}x,$$

注意到$\dfrac{1}{6}x,\dfrac{1}{6}x\sin^6x$ 和 $\sin x$ 均为奇函数,所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}x\sin^6x+\sin x\right)\mathrm{d}x=0,$$

于是原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)\mathrm{d}x=-\pi$.

解法 2　将积分区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分(如图 1-5-2).

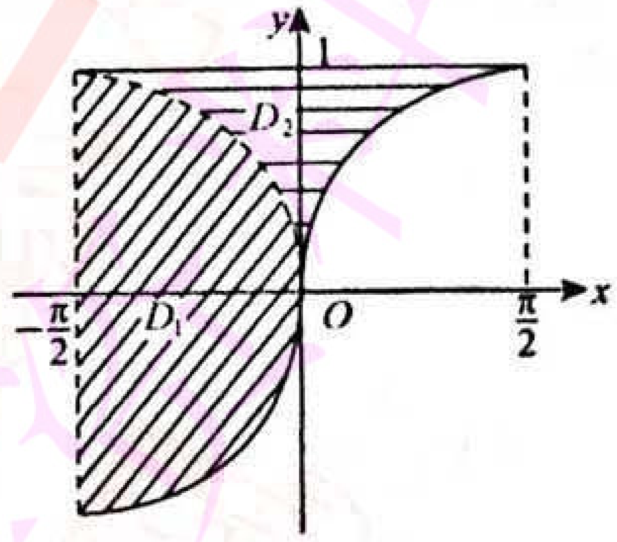


图 1-5-2

由于 D_1 关于 x 轴对称,xy^5 关于 y 是奇函数,因此

$$\iint_{D_1} xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又 D_2 关于 y 轴对称,xy^5 关于 x 是奇函数,故

$$\iint_{D_2} xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

于是

$$\iint_D xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

利用割补的方法,不难看出区域 D 的面积是 π,因而

$$\iint_D (xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

注　本题和第 1 题都是考查二重积分的(普通)对称性,可参考"5.3 考点点睛"中的"2. 普通对称性".

4 [2013]　设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分,记 $I_k=\iint_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k=1,2,3,4)$,则

(A) $I_1>0$.　　(B) $I_2>0$.　　(C) $I_3>0$.　　(D) $I_4>0$.

答　应选(B).

解　注意到在区域 D_2 内 $y-x\geqslant 0$,在区域 D_4 内 $y-x\leqslant 0$,且其等号不恒成立.因而 $I_2>0$,$I_4<0$.这排除了选项(D).

又区域 D_1 和 D_3 都是关于直线 $y=x$ 对称,在这两个区域内交换 x 与 y 的位置,则被积函数变为 $x-y$,且 $x-y=-(y-x)$,于是 $I_1=I_3=0$.这排除了选项(A)和(C).

本题也可以通过计算二重积分求得答案.

$$I_1=\iint_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta=0,$$

$$I_2=\iint_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}.$$

同理可得,$I_3=0$,$I_4=-\frac{2}{3}$.

故选(B).

5.2　二重积分化为累次积分,累次积分换序、换系及计算

5 [2004]　设函数 $f(u)$ 连续,区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,则 $\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$.　　(B) $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}r$.　　(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$.

答　应选(D).

解　因为从 $x^2+y^2=2y$ 解出 $y=1\pm\sqrt{1-x^2}$,它们分别是内层积分的上、下限.故选项(A)可排除.把直角坐标系下的二重积分化为极坐标系下的二重积分时,面积元素 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,故选项(C)可排除.由于

$f(xy)$关于 y 轴的奇偶性是未知的，故选项(B)可以排除，于是应选(D). 当然，将二重积分化为极坐标系下的二次积分可直接得到(D). 因为区域 $D:0\leqslant\rho\leqslant 2\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi$，故

$$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r.$$

6 [2006] 设 $f(x,y)$为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

答 应选(C).

解 积分区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$，如图 1－5－3 所示. 若先对 y 积分再对 x 积分，需将 D 分成两个区域 D_1 和 D_2，故可排除(A)，(B). 区域D 可表示为

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

于是选(C).

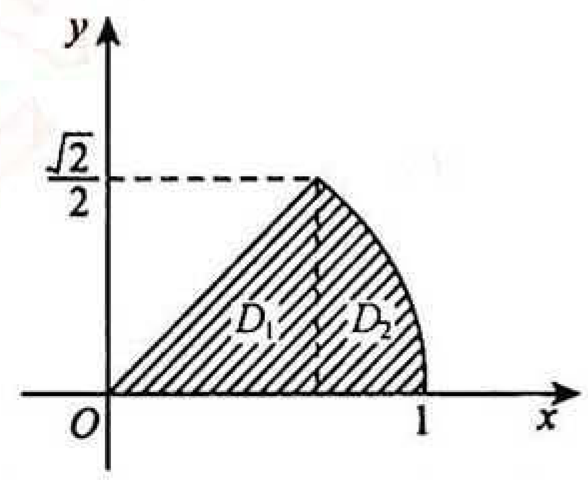


图 1－5－3

7 [2007] 设函数 $f(x,y)$连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

答 应选(B).

解 根据所给二次积分得到积分区域为 $D:\begin{cases}\sin x<y<1,\\ \frac{\pi}{2}<x<\pi,\end{cases}$ 如图 1－5－4 所示，则有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

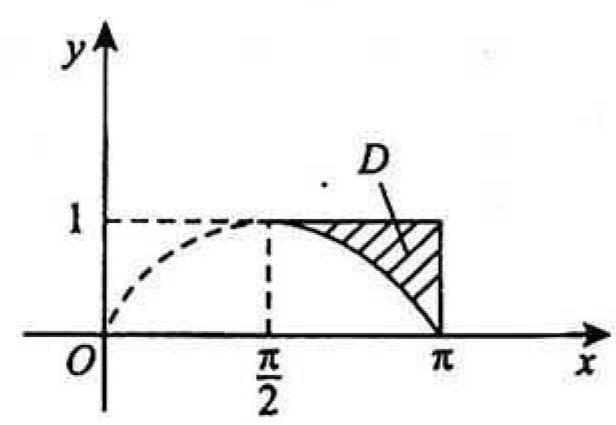


图 1－5－4

8 [2009] 设函数 $f(x,y)$连续，则 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$

(A) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{4-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_y^{4-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

答 应选(C).

解 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分区域为两部分：

$$D_1=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,y\leqslant x\leqslant 4-y\},$$

将上述两部分合并写成

$$D=D_1\cup D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 4-y\},$$

故

$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

答案为(C).

9 [2015]　设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r.$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r.$

答　应选(B).

解　区域 D 如图 1—5—5 所示. 作极坐标变换，将 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分.

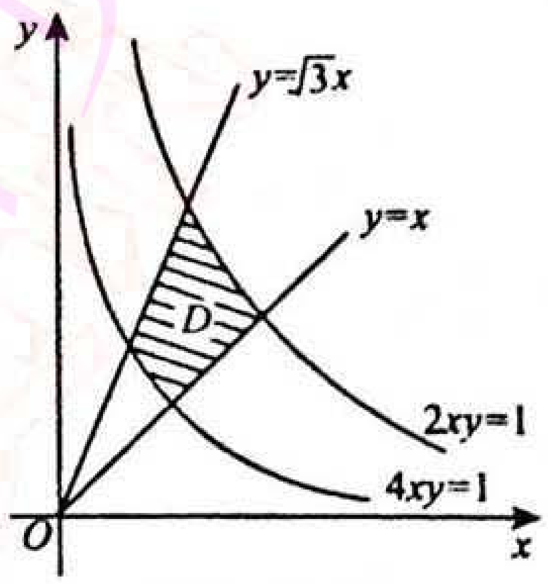


图 1—5—5

D 的极坐标表示为

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

因此　$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

10 [2017]　$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=$ ________.

答　应填 $-\ln(\cos 1)$.

解　积分区域如图 1—5—6 所示，交换积分次序有

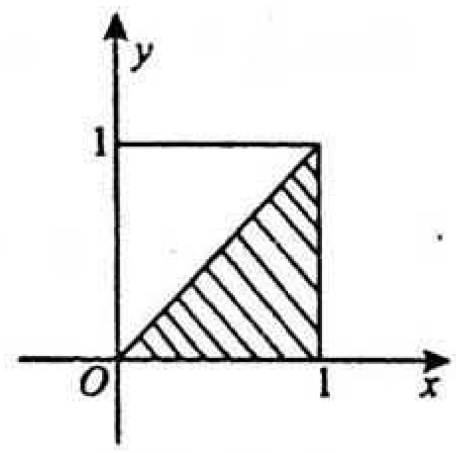


图 1—5—6

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\tan x\mathrm{d}x=-\ln(\cos x)\Big|_0^1=-\ln(\cos 1).$$

注　以上几道考题考查的是直角坐标与直角坐标，直角坐标与极坐标下的交换积分次序，实际上还有一种极坐标与极坐标下的交换积分次序，但这种问题从未考查过，这一点也请读者注意.

5.3　计算二重积分

考点点睛

1. 计算二重积分常用的方法

(1) 直角坐标；

(2) 极坐标；

(3) 对称性(普通对称性，轮换对称性)；

(4) 逆用形心公式.

2. 普通对称性

(1) 设平面区域 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{ 关于 }x\text{ 是奇函数},\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 }x\text{ 是偶函数},\end{cases}\ D_1\text{ 是 }D\text{ 在 }x\geqslant 0\text{ 部分}.$$

(2) 设平面区域 D 关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{ 关于 }y\text{ 是奇函数},\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 }y\text{ 是偶函数},\end{cases}\ D_1\text{ 是 }D\text{ 在 }y\geqslant 0\text{ 部分}.$$

3. 轮换对称性

(1) 设平面区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设平面区域 D_1 与 D_2 关于直线 $y=x$ 对称，$f(x,y)$ 在 $D_1\cup D_2$ 上连续，则

$$\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 形心公式的逆用

当积分区域 D 是规则图形(如圆、半圆、矩形、三角形等)，且被积函数是“$ax+by$”这种线性组合形式，则 $\iint_D(ax+by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a\bar{x}+b\bar{y})\cdot A_D$. 其中 $(\bar{x},\bar{y})$ 是规则图形 D 的形心坐标.

5. 二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的两个要素(1)被积函数 $f(x,y)$；(2)积分区域 D

故一类问题是“折腾”被积函数 $f(x,y)$，如被积函数加“max{ }(最大值)，[ ](取整)，| |(绝对值)”，包括被积函数是分段函数的情形；另一类问题则是“折腾”积分区域 D，如用极坐标表达积分区域，甚至是用参数方程表达积分区域(未考过).

11 [2005] 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 是正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$

(A) $ab\pi$. (B) $\dfrac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\dfrac{a+b}{2}\pi$.

答 应选(D).

解 因为 $\iint_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\iint_D \dfrac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma$，故

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma&=\frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma+\iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma\right]\\&=\frac{1}{2}\iint_D(a+b)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.\end{aligned}$$

注 本题利用了二重积分的轮换对称性，另外也可以直接取一个具体的函数 $f(x)=1$ 去排除.

12 [2005] 计算二重积分 $\iint_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解 将区域 D 分成两个子区域：

$$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

则

$$\iint_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma.$$

由于

$$\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8},$$

$$\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2-1)dy - \left(-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}-1\right)dx + \frac{\pi}{8}$$
$$= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x\right)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{8} = -\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8},$$

故

$$\iint_D |x^2+y^2-1|\,d\sigma = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

注　由于 D_2 是一个不规则图形，利用分块的做法把 $\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$ 写成 $\iint_D (x^2+y^2-1)dxdy - \iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$ 的形式，这一技巧在二重积分中经常遇到，读者应熟练掌握.

13 [2006]　设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$，计算二重积分 $I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

解　因为 $I_1 = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^2}rdr = \frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln 2,$

$$I_2 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}dr = 0,$$

所以
$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

14 [2007]　设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2. \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.

解　由区域的对称性和被积函数的奇偶性有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 4\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma,$$

其中 D_1 为 D 在第一象限的部分，而

$$\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma = \iint_{D_{11}} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x,y)d\sigma,$$

其中
$$D_{11}=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\},$$
$$D_{12}=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x+y\leqslant 2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}\text{（如图 1－5－7）}.$$

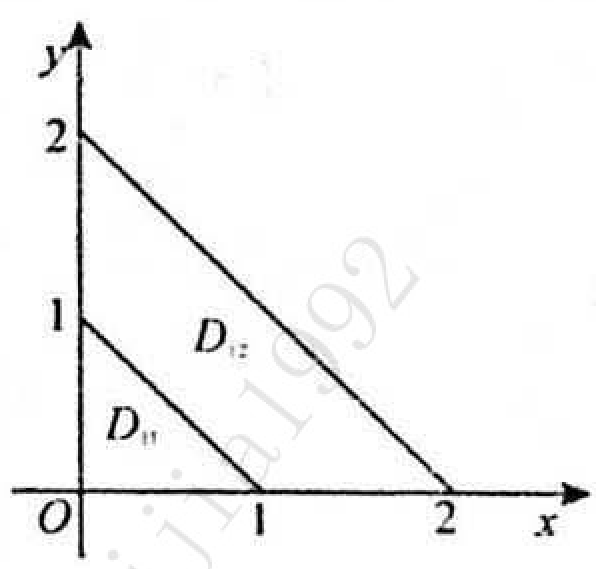


图 1－5－7

因为
$$\iint_{D_{11}} f(x,y)d\sigma = \iint_{D_{11}} x^2 d\sigma$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy$$
$$= \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{12},$$

$$\iint_{D_{12}} f(x,y)d\sigma = \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1),$$

所以
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 4\left[\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right] = \frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

15 [2008]　计算 $\iint_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分成如图 1—5—8 所示的两个区域 D_1 和 D_2.

$$\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}xy\mathrm{d}y+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{0}^{2}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

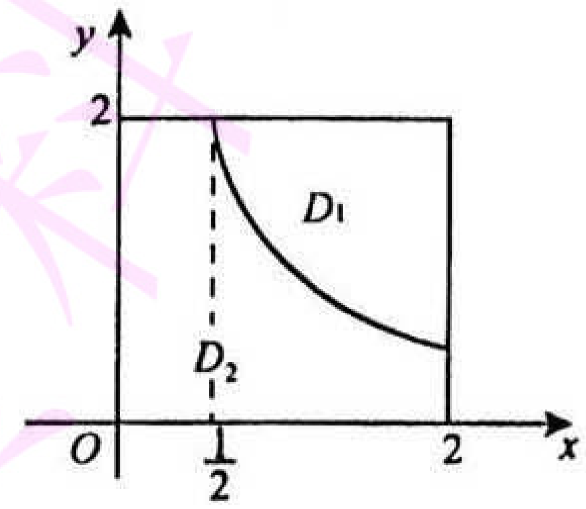


图 1—5—8

注 也可采取分块的做法计算 $\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,即 $\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

16 [2009] 计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中

$$D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,y\geqslant x\}.$$

解法 1 区域 D 的极坐标表示为

$$0\leqslant r\leqslant 2(\sin\theta+\cos\theta),\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},$$

所以

$$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^3\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

解法 2 作平移变换,将偏心圆转化为标准圆:令 $u=x-1,v=y-1$,则积分区域 D 变为 D':$u^2+v^2\leqslant 2,v\geqslant u$,于是

$$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)r\mathrm{d}r=-\frac{8}{3}.$$

17 [2010] 计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,其中 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$.

解 由题设知,积分区域 D 如图 1—5—9 所示,将积分化为直角坐标系下的二重积分为

$$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x.$$

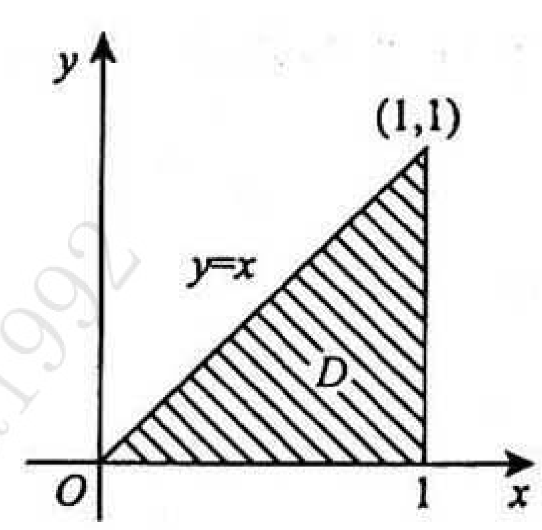


图 1—5—9

设 $x=\sin t$,则

$$I=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

18 [2011] 设平面区域 D 由直线 $y=x$,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成,则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$________.

答 应填 $\frac{7}{12}$.

解法 1 利用极坐标,得

$$I=\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^4\sin^4\theta}{4}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\right]=\frac{7}{12}.$$

解法 2 利用直角坐标，得

$$I=\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}}xy\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x[(1+\sqrt{1-x^2})^2-x^2]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(x+x\sqrt{1-x^2}-x^3)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1=\frac{7}{12}.$$

19 [2011] 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=f(x,1)=0$，$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 因为 $f(1,y)=0,f(x,1)=0$，所以

$$f'_y(1,y)=0,f'_x(x,1)=0,$$

从而

$$I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=a.$$

20 [2012] 计算二重积分 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

解法 1

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\iint_D r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^4\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^4[1-(1+\cos\theta)]\mathrm{d}(1+\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}(1+\cos\theta)^5\Big|_0^\pi-\frac{1}{6}(1+\cos\theta)^6\Big|_0^\pi\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{2^5}{5}+\frac{2^6}{6}\right)=\frac{16}{15}.$$

解法 2

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^4\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\text{令}\cos\theta=t}\frac{1}{4}\int_{-1}^1(1+t)^4t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(t+4t^2+6t^3+4t^4+t^5)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{4}\int_{0}^{1}(4t^2+4t^4)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{1}(t^2+t^4)\mathrm{d}t=\frac{16}{15}.$$

21 [2013] 设平面区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解法 1 直线 $x+y=8$ 与直线 $y=3x$ 和 $x=3y$ 分别交于点 $(2,6)$ 和 $(6,2)$,直线 $x=2$ 将区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分(如图 1—5—10),则有

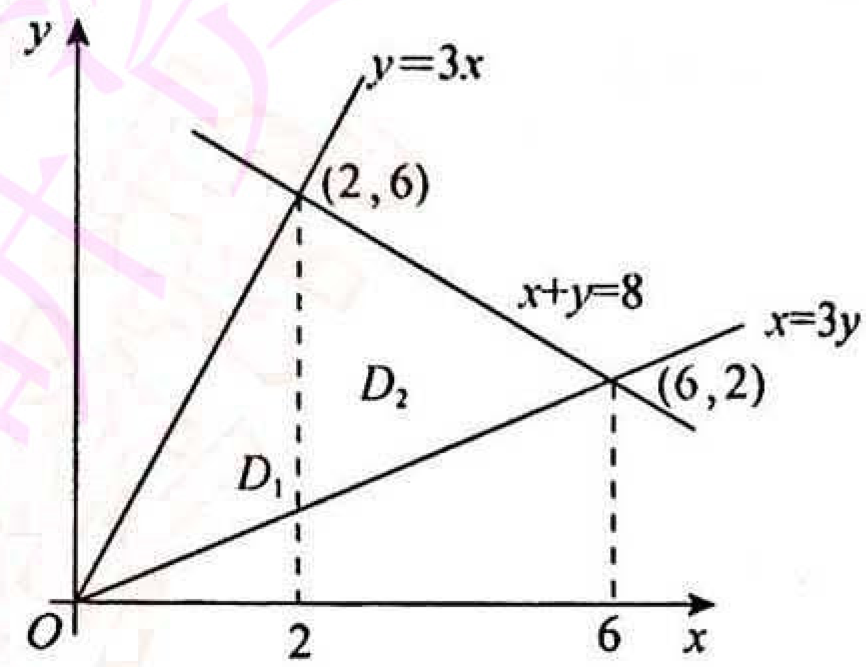


图 1—5—10

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}x^2\mathrm{d}y+\int_2^6\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}x^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^2x^3\mathrm{d}x+\int_2^6\left(8x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^2+\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4\right)\Big|_2^6=\frac{416}{3}.$$

解法 2 $\displaystyle\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{8}{\cos\theta+\sin\theta}}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r$

$$=\frac{8^4}{4}\int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\frac{\cos^2\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8^4}{4}\int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\frac{1}{(1+\tan\theta)^4}\mathrm{d}(\tan\theta)$$

$$=-\frac{8^4}{12}\cdot\frac{1}{(1+\tan\theta)^3}\Big|_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}=\frac{416}{3}.$$

22 [2014] 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,计算 $\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解法 1 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r.$

由于 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4},$

$$\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi}\left(-r\cos\pi r+\frac{1}{\pi}\sin\pi r\right)\Big|_1^2=-\frac{3}{\pi},$$

则 $$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{4}.$$

解法 2 利用轮换对称性.

$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})+y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r=-\frac{3}{4}.$$

注 对于二重积分的计算题,首先要考虑有无对称性(普通对称性、轮换对称性),若有,则用这些对称性去化简积分,然后再去计算.

23 [2015] 计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,y\geqslant x^2\}$.

解 因为区域 D 关于 y 轴对称，所以 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\mathrm{d}y\\ &=2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\mathrm{d}x\\ &=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x-2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $x=\sqrt{2}\sin t$，则

$$\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}.$$

又 $\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$，所以

$$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

24 [2016] 设 D 是由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 因为区域 D 关于 y 轴对称，所以 $\iint\limits_D\frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}r\mathrm{d}r\\ &=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^2\theta-2)\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{2}(-\cot\theta-2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\\ &=1-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

25 [2017] 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $$\iint\limits_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(x^2+2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

D 的边界曲线在极坐标系下的方程为 $r=2\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r\\ &=4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\ &=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

又因为 $\iint\limits_D(2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\pi=\pi$，所以 $\iint\limits_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5\pi}{4}$.

第 6 章　常微分方程

考点分布

考点 \ 分值 \ 年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
一阶常微分方程	5	5	6	5	5	5	5	3	8	8	5	3	7		3	7
二阶可降阶方程										5						3
高阶线性方程	5	10	10	9	9	9	9	9	3	3	5	5	3	3	7	3
微分方程应用									5		12	14	4	7	16	

1987—2002 年

考点 \ 分值 \ 年份	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（87—17 年）
一阶常微分方程	4	4	4	4		4		15	4	14				4		137
二阶可降阶方程					10		10									28
高阶线性方程	12	4	12	4	4	4	12	4	4		4	10	4	10	4	194
微分方程应用	22	11				11			10				10		11	133

2003—2017 年

6.1　一阶常微分方程

考点点睛

一阶常微分方程主要有：变量可分离方程、齐次微方方程、一阶线性方程三种类型.

1［1987—Ⅲ］ 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$ 满足条件 $y\Big|_{x=\sqrt{2}}=0$ 的特解.

解　化原方程为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}\cdot y=1,$$

得其通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int 1\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{2}x+\frac{C}{x}.$$

由 $y\Big|_{x=\sqrt{2}}=0$，得 $C=-1$，故所求特解为

$$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}.$$

2 [1988—Ⅲ]　求微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解（一般解）.

解　$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{1}{x(x^2+1)}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\frac{1}{x}\left(\int\frac{1}{1+x^2}dx+C\right)=\frac{1}{x}(\arctan x+C)$，

其中 C 为任意常数.

3 [1989—Ⅲ]　求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}(0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解.

解　由通解公式有

$$y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}\left(\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx+C\right),$$

得

$$y=\frac{e^x}{x}(C+e^x).$$

再由 $y(1)=0$，得 $C=-e$.

故所求解为

$$y=\frac{e^x}{x}(e^x-e).$$

4 [1990—Ⅲ]　求微分方程 $x\ln x\,dy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=e}=1$ 的特解.

解　将原方程化为

$$y'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x}(x>0,x\neq 1).$$

由公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right],$$

得

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x\ln x}}\left(\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}dx+C\right)=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\ln^2x+C\right).$$

又由 $y\Big|_{x=e}=1$，可解出 $C=\frac{1}{2}$，所以方程的特解是 $y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$.

5 [1991—Ⅲ]　求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

解　$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}[(x-1)e^x+C]$.

将 $x=1,y=1$ 代入，得 $C=1$，则所求特解为 $y=\frac{x-1}{x}e^x+\frac{1}{x}$.

6 [1992—Ⅲ]　求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$ 的通解.

解　原方程可化为

$$y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{2},$$

这是一阶线性方程，其通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int-\frac{x^2}{2}e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right)=\sqrt{x}\left(-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right)$$

$=C\sqrt{x}-\frac{1}{5}x^3$，其中 C 为任意常数.

7 [1993—Ⅲ]　求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解　原方程可化为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}.$$

此一阶线性微分方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left(\int e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\cdot\frac{\cos x}{x^2-1}dx+C\right),$$

即
$$y=\frac{\sin x+C}{x^2-1}.$$

由 $y(0)=1$,得 $C=-1$,故满足初始条件的特解为

$$y=\frac{\sin x-1}{x^2-1}.$$

8 [1994—Ⅲ] 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

答 应填 $(x-4)y^4=Cx$,其中 C 为任意常数.

解 该方程是一个变量可分离方程,即

$$-\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x^2-4x}\mathrm{d}x,$$

故
$$-\ln|y|=-\frac{1}{4}(\ln|x|-\ln|x-4|)+C_1,$$

即
$$(x-4)y^4=Cx,\text{其中 } C \text{ 为任意常数}.$$

9 [1995—Ⅲ] 设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y\Big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

解 以 $y=e^x$ 代入原方程,得

$$xe^x+p(x)e^x=x,$$

解出
$$p(x)=xe^{-x}-x,$$

代入原方程得
$$xy'+(xe^{-x}-x)y=x,\text{即 } y'+(e^{-x}-1)y=1.$$

解其对应的齐次方程 $y'+(e^{-x}-1)y=0$,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=(-e^{-x}+1)\mathrm{d}x,\ln|y|-\ln|C_1|=e^{-x}+x,$$

得齐次方程的通解 $y=Ce^{x+e^{-x}}$. 所以,原方程的通解为

$$y=e^x+Ce^{x+e^{-x}}.$$

由 $y\Big|_{x=\ln 2}=0$,得 $2+2e^{\frac{1}{2}}C=0$,即 $C=-e^{-\frac{1}{2}}$,故所求特解为 $y=e^x-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$.

10 [1996—Ⅲ] 设 $f(x)$ 为连续函数.

(1)求初值问题 $\begin{cases}y'+ay=f(x),\\ y|_{x=0}=0\end{cases}$ 的解 $y(x)$,其中 a 是正常数;

(2)若 $|f(x)|\leqslant k$(k 为常数),证明当 $x\geqslant 0$ 时,有 $|y(x)|\leqslant\frac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

(1)**解** 原方程的通解为

$$y(x)=e^{-\int a\mathrm{d}x}\left[\int f(x)e^{\int a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-ax}\left[\int f(x)e^{ax}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-ax}[F(x)+C],$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的任一原函数. 由 $y(0)=0$,得 $C=-F(0)$,故

$$y(x)=e^{-ax}[F(x)-F(0)]=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}\mathrm{d}t.$$

(2)**证** $|y(x)|\leqslant e^{-ax}\int_0^x|f(t)|e^{at}\mathrm{d}t\leqslant ke^{-ax}\int_0^x e^{at}\mathrm{d}t=\frac{k}{a}e^{-ax}(e^{ax}-1)=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}),x\geqslant 0.$

11 [1997] 求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 令 $y=xu$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\frac{y^2-2xy-3x^2}{x^2-2xy}=\frac{u^2-2u-3}{1-2u}$,即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{3(u^2-u-1)}{2u-1},$$

解之得 $u^2-u-1=Cx^{-3}$，即 $y^2-xy-x^2=Cx^{-1}$ 或 $xy^2-x^2y-x^3=C$，其中 C 为任意常数.

12 [1998] 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小，且 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.　　(B) 2π.　　(C) π.　　(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$.

答 应选(A).

解 本题实质上是解微分方程. 首先由增量式舍去高阶无穷小得到微分方程

$$\mathrm{d}y=\frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

利用分离变量解得 $y=Ce^{\arctan x}$. 再由 $y(0)=\pi$ 得 $C=\pi$，即 $y=\pi e^{\arctan x}$. 则 $y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$. 所以(A)项是正确的.

注 还可以在 $\Delta y=\dfrac{y}{1+x^2}\Delta x+\alpha$ 两端同除以 Δx，建立微分方程 $y'=\dfrac{y}{1+x^2}$.

13 [1999] 求初值问题 $\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0\ (x>0),\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

令 $y=xu$，得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\sqrt{1+u^2}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，

解得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln Cx,$$

其中 C 为任意正常数，从而 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$，即 $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=Cx$，

亦即
$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$$

将 $y|_{x=1}=0$ 代入，得 $C=1$，故初值问题的解为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2,$$

化简得
$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}.$$

14 [2001] 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为________.

答 应填 $y\cdot\arcsin x=x-\dfrac{1}{2}$.

解 题目中把 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 称为“关系式”而不是方程，就是提醒考生除了利用一阶线性方程求解外还有更方便的解法. 事实上，等式的左端等于 $(y\cdot\arcsin x)'$，关系式变成 $(y\cdot\arcsin x)'=1$. 两边积分得

$$y\cdot\arcsin x=x+C,$$

再将 $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ 代入得 $C=-\dfrac{1}{2}$.

15 [2003] 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的解，则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$.

答 应选(A).

解法 1 由 $y=\frac{x}{\ln x}$ 得 $y'=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，代入微分方程得

$$\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

则
$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{\ln^2 x}=-\frac{\frac{x^2}{\ln^2 x}}{x^2}=-\frac{y^2}{x^2}.$$

解法 2 令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y'=u+xu'$，代入微分方程得

$$u+xu'=u+\varphi\left(\frac{1}{u}\right),\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

故
$$\ln x=\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

而 $y=\frac{x}{\ln x}$ 是微分方程的解，从而

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}=\frac{x}{y}=\frac{1}{u},$$

两边求导有
$$\varphi\left(\frac{1}{u}\right)=-u^2,$$

即
$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}.$$

16 [2004] 微分方程 $(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 满足 $y\Big|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解为________.

答 应填 $y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$.

解 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{2x}=\frac{1}{2}x^2,$$

这是一阶非齐次线性方程，于是

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{5}x^3+C\sqrt{x}.$$

由 $y\Big|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 知 $C=1$，故

$$y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}.$$

17 [2005] 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为________.

答 应填 $y=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$.

解 原方程可化为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，这是一阶非齐次线性微分方程，故

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\ln x\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x^2}\left(\int x^2\ln x\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{3}\ln x - \frac{x}{9} + \frac{C}{x^2}.$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故

$$y = \frac{x}{3}\ln x - \frac{x}{9} = \frac{x}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right).$$

18 [2006] 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

答 应填 $y = Cxe^{-x}$，其中 C 为任意非零常数.

解 分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-x}{x}dx,$$

两边积分，得

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln e^x + \ln|C|,$$

即

$$y = Cxe^{-x}, \text{其中 } C \text{ 为任意非零常数.}$$

19 [2008] 微分方程 $(y + x^2e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 $y=$________.

答 应填 $x(C - e^{-x})$，其中 C 为任意常数.

解 微分方程可变形为

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xe^{-x},$$

这是一阶非齐次线性微分方程，通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{-x}e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + C\right) = x\left(\int e^{-x}dx + C\right) = x(C - e^{-x}), \text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

20 [2010] 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解，若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

(A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.　　(B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.

(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$.　　(D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

答 应选(A).

解 将 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 代入方程 $y' + p(x)y = q(x)$，得

$$\lambda[y_1' + p(x)y_1] + \mu[y_2' + p(x)y_2] = q(x).$$

由题设可知

$$y_1' + p(x)y_1 = q(x), \quad y_2' + p(x)y_2 = q(x),$$

从而有

$$\lambda + \mu = 1.$$

类似地，将 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 代入方程 $y' + p(x)y = 0$，得

$$\lambda - \mu = 0,$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. 故选项(A)正确.

事实上，当 $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$ 时，$\lambda y_1 + \mu y_2$ 不是方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解，与题设矛盾. 故选项(B)不正确.

同理可知选项(D)也不正确.

当 $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ 时，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 不是齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的解，与题设矛盾. 故选项(C)也不正确.

注 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解，则对于 $k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n$，

当 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 时，$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n$ 仍是 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解；
当 $k_1+k_2+\cdots+k_n=0$ 时，$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解.

21 [2011] 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

答 应填 $e^{-x}\sin x$.

解 根据一阶非齐次线性微分方程的通解公式，得

$$y(x)=e^{-\int dx}\left(C+\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx\right)$$
$$=e^{-x}\left(C+\int\cos x dx\right)$$
$$=e^{-x}(C+\sin x).$$

由 $y(0)=0$，得 $C=0$，所以 $y=e^{-x}\sin x$.

22 [2012] 微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$________.

答 应填 $\sqrt{x}$.

解 将微分方程变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=3y$，这是一阶线性微分方程，其通解为

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(\int 3ye^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)=\frac{1}{y}\left(\int 3y^2dy+C\right)=y^2+\frac{C}{y}.$$

将 $y\Big|_{x=1}=1$ 代入上式，得 $C=0$，于是 $x=y^2$，即 $y=\pm\sqrt{x}$. 注意到 $y\Big|_{x=1}=1$，故将 $y=-\sqrt{x}$ 舍去，得

$$y=\sqrt{x}.$$

23 [2016] 以 $y=x^2-e^x$ 与 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为________.

答 应填 $y'-y=2x-x^2$.

解 利用线性微分方程解的性质与结构. 设所求的一阶非齐次线性微分方程为

$$y'+p(x)y=q(x).$$

显然 $y=x^2$ 和 $y=x^2-e^x$ 的差 e^x 是方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，代入方程得

$$p(x)=-1.$$

再把 $y=x^2$ 代入方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 得 $q(x)=2x-x^2$.
故所求的一阶非齐次线性微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

6.2 二阶可降阶方程

考点点睛

1. $y''=f(x,y')$ 型(方程中不显含未知函数 y)

(1)令 $y'=p(x)$，$y''=p'$，则原方程变为一阶方程 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$；

(2)若求得其解为 $p=\varphi(x,C_1)$，即 $y'=\varphi(x,C_1)$，则原方程的通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

2. $y''=f(y,y')$ 型(方程中不显含自变量 x)

(1)令 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$，则原方程变为一阶方程 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$；

(2)若求得其解 $p=\varphi(y,C_1)$，则由 $p=\frac{dy}{dx}$ 可得 $\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$，分离变量得 $\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$；

(3)两边积分得 $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$，即可求得原方程的通解.

24 [2002] 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是______.

答 应填 $y=\sqrt{x+1}$ 或 $y^2=x+1$.

解 令 $y'=p$ 代入方程得 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p^2=0$，而 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$，所以有

$$\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p\right)p=0(p=0\text{ 舍去}),$$

则
$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0,$$

解得
$$p=\frac{1}{C_1y},$$

代入初始条件 $y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 知 $C_1=2$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}$，再由此方程解得 $y^2=x+C_2$，由于 $y\Big|_{x=0}=1$，所以 $C_2=1$，即得特解为

$$y^2=x+1\text{ 或 }y=\sqrt{x+1}(\text{由 }y\Big|_{x=0}=1\text{ 可知舍去“}-\text{”}).$$

注 若是一开始看出方程左端可以写成 $(yy')'$，则直接有：$(yy')'=0\Rightarrow yy'=C$，余下同上解答.

25 [2007] 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为

$$p'(x+p^2)=p,$$

移项可得
$$p\mathrm{d}x-x\mathrm{d}p=p^2\mathrm{d}p,$$

即
$$\frac{p\mathrm{d}x-x\mathrm{d}p}{p^2}=\mathrm{d}p,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{p}\right)=\mathrm{d}p,$$

于是有 $\frac{x}{p}=p+C_1$. 因 $p\Big|_{x=1}=y'(1)=1$，得 $C_1=0$，故 $p^2=x$.

由 $y'(1)=1$ 知，应取 $p=\sqrt{x}$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x},$$

解得 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$. 又由 $y(1)=1$ 得 $C_2=\frac{1}{3}$，故

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}.$$

6.3 高阶常系数线性方程

6.3.1 确定二阶常系数非齐次线性微分方程的特解形式

26 [1989—Ⅲ] 微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)

(A)$a\mathrm{e}^x+b$. (B)$ax\mathrm{e}^x+b$. (C)$a\mathrm{e}^x+bx$. (D)$ax\mathrm{e}^x+bx$.

答 应选(B).

解 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的特解应为方程 $y''-y=\mathrm{e}^x$ 和 $y''-y=1$ 的特解之和，而特征方程为

$$r^2-1=0,\text{解得 }r=\pm1.$$

因此 $y''-y=\mathrm{e}^x$ 的特解应为 $y_1^*=ax\mathrm{e}^x$，$y''-y=1$ 的特解应为 $y_2^*=b$.

则原方程特解应具有形式

$$y^*=ax\mathrm{e}^x+b.$$

27 [2004] 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

(A)$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B)$y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C)$y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D)$y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

答 应选(A).

解 这是二阶常系数非齐次线性方程,它对应的齐次方程的特征方程是 $r^2+1=0$,其根为 $r_{1,2}=\pm i$. 把原非齐次方程分解为两个方程:$y''+y=x^2+1$ 与 $y''+y=\sin x$. 对于方程 $y''+y=x^2+1$,其特解形式显然为 $y_1^*=ax^2+bx+c$. 对于方程 $y''+y=\sin x$,由于 $\pm i$ 恰是特征方程的根,故它的特解形式应为 $y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$. 于是根据叠加原理,原方程的特解形式为 $y^*=y_1^*+y_2^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$,即选项(A)是正确的.

28 [2011] 微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$的特解形式为

(A)$a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$. (B)$ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$. (C)$x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$. (D)$x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

答 应选(C).

解 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-\lambda^2=0$,其根为 $r_{1,2}=\pm\lambda$,所以 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$ 的特解为 $y_1^*=axe^{\lambda x}$,$y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$ 的特解为 $y_2^*=bxe^{-\lambda x}$,由叠加原理知原方程的特解形式为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x}),$$

因此选(C).

29 [2017] 微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$的特解可设为 $y^*=$

(A)$Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$. (B)$Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(C)$Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$. (D)$Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

答 应选(C).

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+8=0$,解得 $r_{1,2}=2\pm 2i$.

方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}$ 的特解可设为 $y_1^*=Ae^{2x}$.

方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}\cos 2x$ 的特解可设为

$$y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x).$$

故该方程的特解可设为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x).$$

应选(C).

6.3.2 求解二阶常系数齐次与非齐次线性方程

30 [1987—Ⅲ] 求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

解 由特征方程 $r^2+2r+1=0$,知其特征根为 $r_{1,2}=-1$. 故对应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-x}.$$

设原方程的特解为 $y^*=e^x(ax+b)$,代入原方程可得 $a=\frac{1}{4}$,$b=-\frac{1}{4}$.

因此,原方程的通解为 $y=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

31 [1990—Ⅲ] 求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解,其中 a 为实数.

解 特征方程为 $r^2+4r+4=0$,特征根为 $r_{1,2}=-2$,对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

当 $a\neq-2$ 时,设非齐次方程的特解为

$$y^*=Ae^{ax},$$

代入原方程,得 $A=\frac{1}{(a+2)^2}$,$y^*=\frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}$;

当 $a=-2$ 时,设非齐次方程的特解为

$$y^*=A_1x^2e^{-2x},$$

代入原方程，得 $A_1=\dfrac{1}{2}$，$y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$. 故通解为

$$y=\begin{cases}(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a\neq -2,\\ \left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}, & a=-2,\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

32 [1991—Ⅲ] 求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

解 原方程对应的齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

设非齐次方程 $y''+y=x$ 的特解为 $y_1^*=Ax+B$. 代入方程得 $A=1,B=0$. 所以 $y_1^*=x$.

设非齐次方程 $y''+y=\cos x$ 的特解为 $y_2^*=Ex\cos x+Dx\sin x$，

则
$$y_2^{*\prime\prime}=-2E\sin x+2D\cos x-Ex\cos x-Dx\sin x.$$

代入原方程得 $E=0,D=\dfrac{1}{2}$. 所以 $y_2^*=\dfrac{1}{2}x\sin x$. 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x，其中\ C_1,C_2\ 为任意常数.$$

33 [1992—Ⅲ] 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解.

解 原方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，其根为 $r_1=1,r_2=2$. 于是对应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

由于 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设原方程的一个特解为

$$y^*=x(ax+b)e^x,$$

将其代入原方程得

$$-2ax+2a-b=x,$$

解 $\begin{cases}-2a=1,\\2a-b=0,\end{cases}$ 得 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-1$. 所以

$$y^*=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^x,$$

从而所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)e^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

34 [1993—Ⅲ] 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y^*=e^{2x}+(1+x)e^x$. 试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

解 由题设特解知原方程的特征根为 1 和 2，所以特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$，即

$$r^2-3r+2=0，于是\ \alpha=-3,\beta=2.$$

为确定 γ，只需将 $y_1^*=xe^x$ 代入方程，得

$$(x+2)e^x-3(x+1)e^x+2xe^x=\gamma e^x,$$
$$\gamma=-1.$$

从而原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

35 [1994—Ⅲ] 求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$.

解 对应的齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

当 $a\neq 1$ 时，设原方程的特解为

$$y^*=A\sin x+B\cos x,$$

代入原方程，得

$$A(a^2-1)\sin x+B(a^2-1)\cos x=\sin x,$$

比较等式两端对应项的系数，得

$$A=\frac{1}{a^2-1},B=0,$$

所以 $$y^*=\frac{1}{a^2-1}\sin x.$$

当 $a=1$ 时，设原方程的特解为

$$y^*=x(A\sin x+B\cos x),$$

代入原方程，得

$$2A\cos x-2B\sin x=\sin x,$$

比较等式两端对应项的系数，得 $$A=0,B=-\frac{1}{2},$$

所以 $$y^*=-\frac{1}{2}x\cos x.$$

综合上述讨论：

当 $a\neq1$ 时，通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{a^2-1}\sin x$；

当 $a=1$ 时，通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$，

其中 C_1,C_2 为任意常数.

36 [1995—Ⅲ] 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为________.

答 应填 $y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

解 特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r_1=\mathrm{i},r_2=-\mathrm{i}$.

对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

易观察出该非齐次方程的一个特解为 $y^*=-2x$.

则原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

37 [1996—Ⅲ] 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为________.

答 应填 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

解 特征方程为 $r^2+2r+5=0$，$r_{1,2}=-1\pm2\mathrm{i}$，

故通解为 $y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

38 [1996—Ⅲ] 求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

解 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+r=0$，解之得 $r_1=0,r_2=-1$，故齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1+C_2e^{-x}.$$

设非齐次方程的特解为 $y^*=x(ax^2+bx+c)$，代入原方程得 $a=\frac{1}{3},b=-1,c=2$. 因此，原方程的通解为

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}，其中 C_1,C_2 为任意常数.$$

39 [1999] 微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为________.

答 应填 $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

解 特征方程为 $r^2-4=0$，解得 $r_1=-2,r_2=2$，故 $y''-4y=0$ 的通解 $\bar{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$. 由于非齐次方程右端的非齐次项为 e^{2x}，指数上的 2 为特征方程的单根，故原方程特解可设为 $y^*=Axe^{2x}$，代入原方程化简得 $A=\frac{1}{4}$. 故所求通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}.$$

40［2003 局部］ 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

（Ⅰ）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（Ⅱ）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解 （Ⅰ）解答见第 2 章 43 题.

（Ⅱ）方程 $y''-y=\sin x$ 所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

设方程 $y''-y=\sin x$ 的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入方程 $y''-y=\sin x$，求得 $A=0,B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1,C_2=-1$.

故所求初值问题的解为

$$y(x)=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

41［2007］ 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为________.

答 应填 $C_1e^{3x}+C_2e^x-2e^{2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

解 方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+3=0$，解得 $r_1=3,r_2=1$，故齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^x$. 因为非齐次项 $f(x)=2e^{2x}$，$\alpha=2$ 不是特征方程的根，故可令方程的特解为 $y^*=Ae^{2x}$，代入方程得 $4Ae^{2x}-8Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}$，求得 $A=-2$. 于是方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{3x}+C_2e^x-2e^{2x}，其中 C_1,C_2 为任意常数.$$

42［2010］ 三阶常系数齐次线性微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$________.

答 应填 $C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

解 原方程对应的特征方程为

$$r^3-2r^2+r-2=0,$$

其根为 $r_1=2,r_{2,3}=\pm i$，因此原方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.$$

43［2013］ 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^x-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程满足条件 $y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$________.

答 应填 $-e^x+e^{3x}-xe^{2x}$.

解 记

$$\bar{y}_1=y_1-y_3=e^{3x},\bar{y}_2=y_2-y_3=e^x,$$

则 $\bar{y}_1,\bar{y}_2$ 是题设二阶常系数非齐次线性微分方程对应的齐次方程的两个解，且 $\bar{y}_1$ 和 $\bar{y}_2$ 线性无关. 由此可得题设微分方程的通解是

$$y=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2+y_3,$$

即

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}.$$

代入初始条件 $y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=1$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\3C_1+C_2-1=1,\end{cases}$$

解得 $C_1=1, C_2=-1$，故所求特解为 $y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$.

44 [2015] 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$________.

答 应填 $e^{-2x}+2e^x$.

解 求 $y(x)$ 归结为求解二阶常系数齐次线性方程的初值问题.

$$\begin{cases} y''+y'-2y=0, \\ y(0)=3, y'(0)=0. \end{cases}$$

由特征方程 $r^2+r-2=0$，即 $(r+2)(r-1)=0$ 得特征根 $r_1=-2, r_2=1$，于是得通解 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$.

由初值条件得

$$\begin{cases} C_1+C_2=3, \\ -2C_1+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=1, C_2=2.$$

因此 $y(x)=e^{-2x}+2e^x$.

6.3.3 已知高阶常系数线性方程的解反写方程

45 [1997] 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，求此微分方程.

解 由题设知，e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次方程的一个特解，故此方程是

$$y''-y'-2y=f(x).$$

将 $y=xe^x$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} f(x)&=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x \\ &=e^x-2xe^x, \end{aligned}$$

因此所求方程为

$$y''-y'-2y=e^x-2xe^x.$$

46 [2000] 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是

(A) $y'''-y''-y'+y=0$. (B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$. (D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

答 应选(B).

解 解高阶常系数齐次线性微分方程，是通过解其特征方程确定微分方程的通解. 本题是将此过程反过来使用：由给定的特解知特征方程的根为 $r_1=1, r_2=-1$（2 重），故特征方程是 $(r-1)(r+1)^2=0$，展开得

$$r^3+r^2-r-1=0.$$

从而，微分方程为 $y'''+y''-y'-y=0$，即选项(B)正确.

47 [2006] 函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$. (B) $y''-y'-2y=3e^x$. (C) $y''+y'-2y=3xe^x$. (D) $y''+y'-2y=3e^x$.

答 应选(D).

解 因为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 是二阶常系数非齐次线性方程的解，故 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ 是对应齐次方程的通解，$y^*=xe^x$ 是非齐次方程的特解，从而 $r_1=1, r_2=-2$ 是齐次方程特征方程的根，齐次方程应为 $y''+y'-2y=0$，这样可排除(A)，(B). 又 $\alpha=1$ 是特征方程的单根，故非齐次项 $f(x)=Ae^x$，于是选(D).

48 [2008] 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1, C_2, C_3$ 为任意常数）为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$. (B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$. (D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

答 应选(D).

解 根据条件，由通解的形式可以看出此微分方程的三个特征值分别为 $1, 2i, -2i$，所以它的特征方程为 $(r-1)(r^2+4)=r^3-r^2+4r-4=0$，从而可知该微分方程是 $y'''-y''+4y'-4y=0$. 选项(D)是正确的.

6.3.4　变量代换下求解二阶变系数线性微分方程

49［1998］　利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程

$$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$$

化简，并求出原方程的通解.

解
$$y=u\sec x,y'=u'\sec x+u\tan x\sec x,$$
$$y''=u''\sec x+2u'\tan x\sec x+u\sec^3 x+u\tan^2 x\sec x,$$

代入原方程，将原方程化为
$$u''+2u'\tan x+u\sec^2 x+u\tan^2 x-2u'\tan x-2u\tan^2 x+3u=e^x,$$
即
$$u''+4u=e^x.$$

解之，得通解 $u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{5}e^x$，还原成 y，得原方程的通解

$$y=C_1\frac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\frac{e^x}{5\cos x}\text{，其中 } C_1,C_2 \text{ 为任意常数.}$$

50［2005］　用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1$，$y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

解
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

将 y',y'' 代入原方程，得
$$(1-\cos^2 t)\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}+y=0,$$
即
$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0,$$
其特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r=\pm i$，于是此方程的通解为
$$y=C_1\cos t+C_2\sin t,$$
从而原方程的通解为
$$y=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}.$$

由 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=2$，得 $C_1=2,C_2=1$，故所求方程的特解为
$$y=2x+\sqrt{1-x^2}.$$

51［2016］　已知 $y_1(x)=e^x,y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解. 若 $u(-1)=e,u(0)=-1$，求 $u(x)$，并写出该微分方程的通解.

解　将 $y_2(x)=u(x)e^x$ 代入原方程并整理得
$$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0.$$

令 $u'(x)=z$，则
$$(2x-1)z'+(2x-3)z=0,$$
解得
$$z=\widetilde{C}_1(2x-1)e^{-x},$$
从而
$$u(x)=\int\widetilde{C}_1(2x-1)e^{-x}dx=-\widetilde{C}_1[(2x-1)e^{-x}+2e^{-x}]+\widetilde{C}_2.$$

由 $u(-1)=e,u(0)=-1$，得 $\widetilde{C}_1=1,\widetilde{C}_2=0$，所以 $u(x)=-(2x+1)e^{-x}$.

所以原微分方程的通解为 $$y=C_1e^x-C_2(2x+1).$$

注 本题和上题都是求解二阶变系数微分方程，一般情形的求解是很困难的，这里给出了一个变量代换，利用该变量代换可转化为常系数的情形，进而求解.

6.4 积分方程

考点点睛

求解含变限积分的方程基本解法是方程两端求导或变形后求导，转化为微分方程；并把变动的积分上(或下)限的 x 取值为常数下限(或上限)，得到未知函数满足的附加条件即初始条件(当然，若自然形成，则不必加条件)，求解过程中要注意变形的同解性.

52 [1989—Ⅲ] 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

解
$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$
$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,f''(x)=-\sin x-f(x),$$
即
$$f''(x)+f(x)=-\sin x.$$
这是二阶常系数非齐次线性微分方程，初始条件
$$y\Big|_{x=0}=f(0)=0,y'\Big|_{x=0}=f'(0)=1.$$
对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\sin x+C_2\cos x$. 非齐次方程的特解可设为 $y^*=x(a\sin x+b\cos x)$，用待定系数法求得 $a=0,b=\frac{1}{2}$. 于是 $y^*=\frac{x}{2}\cos x$. 非齐次方程的通解为
$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x.$$
由初始条件得 $C_1=\frac{1}{2},C_2=0$，从而
$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

注 这里为什么可以求一阶导和二阶导要清楚，$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，等号右端的每一项都可导，则左端也可导，于是可以两端求导，对于二阶导也是如此；另外，这类积分方程一定注意找出隐含着的初始条件.

6.5 综合题

53 [2002] 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足
$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$
求 $f(x)$.

解 设
$$y=\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}},$$
则
$$\ln y=\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)},$$

于是有
$$\lim_{h\to0}\ln y=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}$$
$$=x\lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{hx}=x[\ln f(x)]'.$$

从而
$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{x[\ln f(x)]'},$$

代入题目所给等式得
$$e^{x[\ln f(x)]'}=e^{\frac{1}{x}},$$

故有
$$x[\ln f(x)]'=\frac{1}{x},$$

即
$$[\ln f(x)]'=\frac{1}{x^2},$$

两边积分得
$$\ln f(x)=-\frac{1}{x}+C_1,$$
$$f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}},$$

再由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，得 $C=1$，即
$$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}.$$

注 本题是用导函数的定义建立的微分方程，注意不可以使用洛必达法则求 $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}$；另外还应分清 h 是极限变量，而 x 是参变量(视为常数).

54 [2009] 设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\leqslant x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

解 当 $-\pi<x<0$ 时，设 (x,y) 为曲线上任一点，由导数几何意义，法线斜率为
$$k=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

由题意，法线斜率为 $\frac{y}{x}$，所以有
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

分离变量解得
$$x^2+y^2=C,$$

由初始条件 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，得 $C=\pi^2$，所以
$$y=\sqrt{\pi^2-x^2},\ -\pi<x<0. \qquad ①$$

当 $0\leqslant x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$ 的通解为
$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x, \qquad ②$$
$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-1. \qquad ③$$

因为曲线 $y=y(x)$ 光滑，所以 $y(x)$ 连续且可导，由①式知
$$y(0)=\lim_{x\to0^-}y(x)=\lim_{x\to0^-}\sqrt{\pi^2-x^2}=\pi,$$
$$y'(0)=y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{\pi^2-x^2}-\pi}{x}=0,$$

代入②,③式,得 $C_1=\pi, C_2=1$,故

$$y=\pi\cos x+\sin x-x, 0\leqslant x<\pi.$$

因此

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

注 在$(-\pi,0)$上根据导数的几何意义建立方程并求解,在$[0,\pi)$上直接求解二阶常系数非齐次线性微分方程,最后利用曲线在$(-\pi,\pi)$内是一条光滑的曲线可知函数连续且可导,从而求出任意常数,但有多数考生不会利用曲线是光滑的来确定任意常数.

55 [2010] 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t)\end{cases}(t>-1)$ 所确定,其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数,且 $\psi(1)=\frac{5}{2}, \psi'(1)=6$,已知 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$,求函数 $\psi(t)$.

解 因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}}{2+2t}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}.$$

由题设 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$ 得

$$\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)},$$

从而

$$(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2,$$

即

$$\psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t).$$

设 $u=\psi'(t)$,则有 $u'-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$,由求解公式得

$$\begin{aligned}u&=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left[\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C_1\right]\\&=(1+t)\left[\int 3(1+t)\cdot(1+t)^{-1}dt+C_1\right]\\&=(1+t)(3t+C_1).\end{aligned}$$

由 $u\Big|_{t=1}=\psi'(1)=6$,知 $C_1=0$,于是 $\psi'(t)=3t(1+t)$,

$$\begin{aligned}\psi(t)&=3\int(t+t^2)dt\\&=3\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right)+C_2\\&=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_2.\end{aligned}$$

由 $\psi(1)=\frac{5}{2}$,知 $C_2=0$,于是

$$\psi(t)=\frac{3}{2}t^2+t^3 (t>-1).$$

56 [2012] 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式;

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

（Ⅰ）解法 1 联立

$$\begin{cases}f''(x)+f'(x)-2f(x)=0,\\ f''(x)+f(x)=2e^x,\end{cases}$$

解得 $f'(x)-3f(x)=-2e^x$，因此

$$f(x)=e^{3\int \mathrm{d}x}\left[\int(-2e^x)e^{-3\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{3x}\left(-2\int e^x e^{-3x}\mathrm{d}x+C\right)=e^x+Ce^{3x},$$

将其代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$，有

$$(e^x+9Ce^{3x})+e^x+Ce^{3x}=2e^x,$$

可得 $C=0$，于是 $f(x)=e^x$.

解法 2 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 对应的特征方程是 $r^2+r-2=0$，其根为 $r_1=1,r_2=-2$，故 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$，且

$$f'(x)=C_1e^x-2C_2e^{-2x},f''(x)=C_1e^x+4C_2e^{-2x},$$

代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$，有

$$(C_1e^x+4C_2e^{-2x})+C_1e^x+C_2e^{-2x}=2e^x,$$

从而知 $C_1=1,C_2=0$，即有 $f(x)=e^x$.

（Ⅱ）解

$$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+1,$$

$$y''=2x+2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

因为当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$，又 $y(0)=0$，所以曲线的拐点为$(0,y(0))$，即点$(0,0)$.

6.6 应用题

6.6.1 按导数的几何应用列方程

57 [1988－Ⅲ] 设函数 $y=y(x)$满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点$(0,1)$处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.

解 对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设原方程的特解为 $y^*=Axe^x$，得 $A=-2$，故原方程通解是 $y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$. 又已知其图形在点$(0,1)$处与曲线 $y=x^2-x+1$ 有公共切线，得

$$y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=-1,$$

即 $C_1+C_2=1,C_1+2C_2=1$. 解得 $C_1=1,C_2=0$. 所以 $y=(1-2x)e^x$.

注 两条曲线在某点切线重合有两层含义：在该点有相同的函数值及相同的导数值.

58 [1998] 设 $y=y(x)$是一向上凸的连续曲线，其上任意一点(x,y)处的曲率为$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点$(0,1)$处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$的极值.

解 因曲线向上凸，故 $y''<0$. 由题设，有

$$\frac{-y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

化简，即为

$$y''=-(1+y'^2).$$

曲线经过点(0,1),故 $y(0)=1$. 又因在该点处的切线方程为 $y=x+1$,即切线斜率为 1,于是 $y'(0)=1$. 现在归结为求

$$\begin{cases} y''=-(1+y'^2), \\ y(0)=1, y'(0)=1 \end{cases}$$

的特解.

令 $y'=p, y''=p'$,于是得 $p'=-(1+p^2)$,分离变量解得 $\arctan p=C_1-x$. 将 $p(0)=1$ 代入,得 $C_1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$,所以 $y'=p=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$,再积分,得

$$y=\int\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2,$$

将 $y(0)=1$ 代入,得 $C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$,故所求曲线方程为

$$y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+1+\frac{1}{2}\ln 2,$$

取其含有 $x=0$ 在内的连续的一支为

$$y=\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+1+\frac{1}{2}\ln 2, x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right),$$

当 $x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+$ 或 $x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^-$ 时,$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\to 0^+$,$y\to-\infty$,故此函数无极小值. 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,y 取极大值,极大值 $y=1+\frac{1}{2}\ln 2$.

59 [2001] 设 L 是一条平面曲线,其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离,恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距,且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(Ⅰ)试求曲线 L 的方程;

(Ⅱ)求 L 位于第一象限部分的一条切线,使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

解 (Ⅰ)设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

令 $X=0$,则该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由题设知
$$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy',$$

令 $u=\frac{y}{x}$,则此方程可化为
$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

解之得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

由 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$,知 $C=\frac{1}{2}$. 于是 L 方程为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2},$$

即
$$y=\frac{1}{4}-x^2.$$

(Ⅱ)设第一象限内曲线 $y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

即
$$Y=-2xX+x^2+\frac{1}{4},$$

它与 x 轴及 y 轴交点分别为

$$\left(\frac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0\right) \text{与} \left(0,x^2+\frac{1}{4}\right).$$

所求面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

对 x 求导得

$$S'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right),$$

令 $S'(x)=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S'(x)<0$；当 $x>\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S'(x)>0$，因而 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内的唯一极小值点，即最小值点. 于是所求切线为

$$Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4},$$

即

$$Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}.$$

60 [2011]　设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点. 记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求 $y(x)$ 的表达式.

解法 1　由导数的几何意义，有 $y'=\tan\alpha$，即 $\alpha=\arctan y'$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+y'^2}.$$

由题意 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得

$$\frac{y''}{1+y'^2}=y'\text{，即 } y''=y'(1+y'^2). \qquad ①$$

令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入①式得

$$p'=p(1+p^2),$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p(1+p^2)}=\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\ln\frac{p^2}{1+p^2}=2x+\ln C_1. \qquad ②$$

由题意有 $y'(0)=1$，即当 $x=0$ 时 $p=1$，代入②式得 $C_1=\frac{1}{2}$，于是有

$$y'=p=\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}},$$

两边积分得

$$y=\int \frac{\frac{e^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right)^2}}dx=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}+C_2.$$

由题意有 $y(0)=0$，代入上式得 $C_2=-\frac{\pi}{4}$，所以

$$y=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

解法 2 由题设及导数的几何意义得

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}=\tan\alpha,$$

于是有

$$\alpha=y+C_1, \tag{3}$$

$$dx=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}d\alpha.$$

由后一个等式得

$$x+C=\ln|\sin\alpha|,$$

即

$$\sin\alpha=C_2e^x. \tag{4}$$

由题意：曲线 l 与直线 $y=x$ 相切于原点，得

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ y'(0)=\tan\alpha(0)=1, \end{cases}$$

即 $\alpha(0)=\frac{\pi}{4}$，代入④式得 $C_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$，从而得

$$\alpha=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}.$$

将 $y(0)=0$ 和 $\alpha(0)=\frac{\pi}{4}$ 代入③式得 $C_1=\frac{\pi}{4}$. 所以

$$y=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

61 [2017] 设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$. 点 P 是曲线 $l:y=y(x)$ 上的任意一点，l 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$，法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$. 若 $X_P=Y_P$，求 l 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

解 曲线 $l:y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

令 $X=0$ 得 $Y_P=y-xy'$.

曲线 $l:y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$y'(Y-y)=-X+x,$$

令 $Y=0$ 得 $X_P=x+yy'$.

由题设知 $x+yy'=y-xy'$，整理得

$$y'=\frac{y-x}{y+x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1},$$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入上述方程并分离变量得

$$\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|x|+C,$$

即 $\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$，其中 C 为任意常数.

因为曲线 l 过点 $(1,0)$，所以 $C=0$，于是曲线 l 上点的坐标 (x,y) 满足的方程为

$$\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0.$$

6.6.2　按定积分的几何应用列方程

62 [1997]　设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0，M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

解　由已知条件得

$$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta,$$

两边对 θ 求导得
$$r^2=\sqrt{r^2+r'^2},$$

即
$$r'=\pm r\sqrt{r^2-1},$$

从而
$$\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm\mathrm{d}\theta.$$

因为
$$\int\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{r}+C,$$

所以
$$-\arcsin\frac{1}{r}+C=\pm\theta.$$

由条件 $r(0)=2$，知 $C=\frac{\pi}{6}$，故所求曲线 L 的方程为

$$r\sin\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right)=1,$$

即
$$r=\csc\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right),$$

即 L 为直线
$$x\mp\sqrt{3}y=2.$$

63 [1999]　设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

解　曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x).$$

它与 x 轴的交点为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$. 由于 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，从而 $y(x)>0$，于是

$$S_1=\frac{1}{2}y\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'}.$$

又

$$S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t,$$

由条件 $2S_1-S_2=1$ 知

$$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1,\qquad ①$$

两边对 x 求导并化简得

$$yy''=(y')^2.$$

令 $p=y'$，则上述方程可化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

解得 $p=C_1y$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y,$$

于是 $y=\mathrm{e}^{C_1x+C_2}$.

注意到 $y(0)=1$，并由①式得 $y'(0)=1$. 由此可得 $C_1=1,C_2=0$，故所求曲线的方程是 $y=\mathrm{e}^x$.

64 [2005] 如图 1-6-1，C_1 和 C_2 分别是 $y=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像，过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

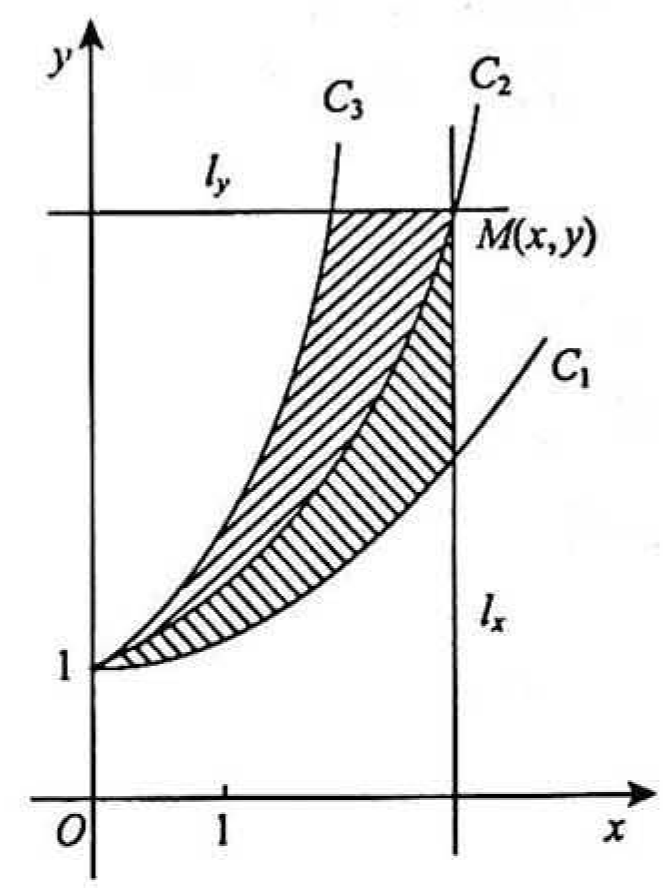


图 1-6-1

解 由题设 $S_1(x)=S_2(y)$，知

$$\int_0^x\left[\mathrm{e}^t-\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^t)\right]\mathrm{d}t=\int_1^y[\ln t-\varphi(t)]\mathrm{d}t,$$

即
$$\int_0^x\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_1^y[\ln t-\varphi(t)]\mathrm{d}t,$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}=[\ln y-\varphi(y)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

由 $y=\mathrm{e}^x$，得

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}=[x-\varphi(\mathrm{e}^x)]\mathrm{e}^x,$$

于是
$$\varphi(\mathrm{e}^x)=x+\frac{1}{2\mathrm{e}^x}-\frac{1}{2},$$

从而
$$\varphi(y)=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2},$$

故曲线 C_3 的方程为
$$x=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}.$$

65 [2008] 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0,x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解 旋转体的体积 $V=\pi\int_0^t f^2(x)\mathrm{d}x$，侧面积 $S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$，

由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

上式两端对 t 求导得

$$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)},$$

即

$$y'=\sqrt{y^2-1}.$$

由分离变量法解得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1,$$

即

$$y+\sqrt{y^2-1}=Ce^t.$$

将 $y(0)=1$ 代入知 $C=1$，故

$$y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}),$$

于是所求函数为

$$y=f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

6.6.3 按变化率列方程

66 [1995—Ⅲ] 设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v\Big|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比（比例常数为 1），问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

解 设质点的运动速度为 $v(t)$. 由题设，有

$$\begin{cases} v'(t)+v(t)=0, \\ v\Big|_{t=0}=v_0, \end{cases}$$

解此方程，得

$$v(t)=v_0e^{-t}.$$

由 $\frac{v_0}{3}=v_0e^{-t}$，得 $t=\ln 3$. 到此时刻该质点所经过的路程

$$S=\int_0^{\ln 3}v_0e^{-t}dt=\frac{2}{3}v_0.$$

67 [2000] 某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标. 为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内？（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的.）

解 设从 2000 年初（令此时 $t=0$）开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m，浓度为 $\frac{m}{V}$，则在时间间隔 $[t,t+dt]$ 内，排入湖泊中 A 的量为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}dt=\frac{m_0}{6}dt$，流出湖泊的水中 A 的量为

$$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt,$$

因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量

$$dm=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)dt.$$

由分离变量法解得

$$m=\frac{m_0}{2}-Ce^{-\frac{t}{3}},$$

代入初始条件 $m\Big|_{t=0}=5m_0$，得 $C=-\frac{9}{2}m_0$.

于是
$$m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}}).$$

令 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$，即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

68 [2001] 一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $K>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时?

解 设雪堆在时刻 t 的体积 $V=\frac{2}{3}\pi r^3$，侧面积 $S=2\pi r^2$，由题设知
$$\frac{dV}{dt}=2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-KS=-2\pi Kr^2,$$
于是 $\frac{dr}{dt}=-K$. 积分得 $r=-Kt+C$，由 $r\Big|_{t=0}=r_0$，有 $r=r_0-Kt$.

又
$$V\Big|_{t=3}=\frac{1}{8}V\Big|_{t=0},$$
即
$$\frac{2}{3}\pi(r_0-3K)^3=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r_0^3,$$
这样 $K=\frac{1}{6}r_0$，从而 $r=r_0-\frac{1}{6}r_0t$.

因雪堆全部融化时 $r=0$，故得 $t=6$，即雪堆全部融化需 6 小时.

69 [2003] 有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)\ (y\geqslant 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图 1—6—2)，容器的底面圆的半径为 2 m. 根据设计要求，当以 3 m^3/min 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 π m^2/min 的速率均匀扩大(假设注入液体前，容器内无液体).

(Ⅰ)根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(Ⅱ)求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

(注：m 表示长度单位米，min 表示时间单位分.)

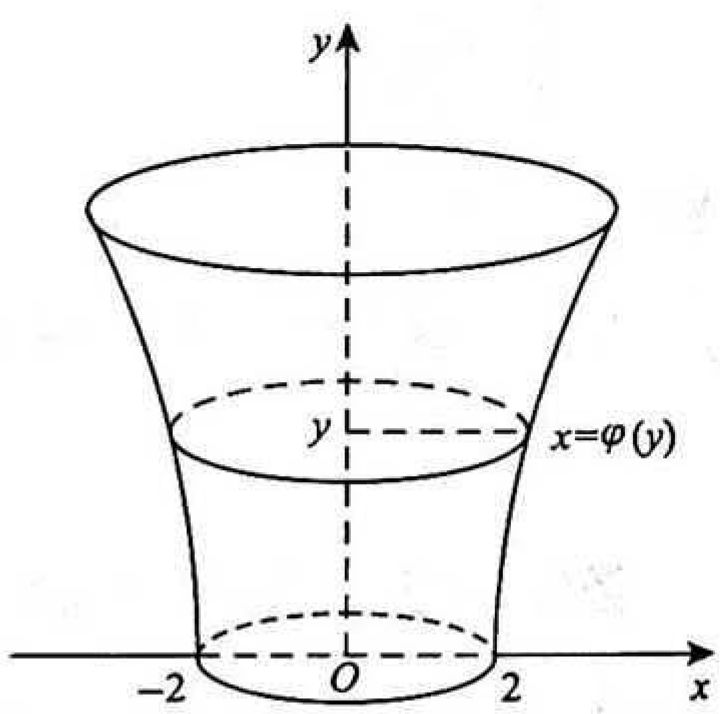


图 1—6—2

解法 1 (Ⅰ)设在 t 时刻，液面的高度为 y，则由题设知此时液面的面积为 $\pi\varphi^2(y)=4\pi+\pi t$，从而 $t=\varphi^2(y)-4$.

(Ⅱ)液面的高度为 y 时，液体的体积为
$$\pi\int_0^y\varphi^2(u)du=3t=3\varphi^2(y)-12.$$

上式两边对 y 求导，得
$$\pi\varphi^2(y)=6\varphi(y)\varphi'(y),$$
即
$$\pi\varphi(y)=6\varphi'(y).$$
解此微分方程，得
$$\varphi(y)=Ce^{\frac{\pi}{6}y},$$
由 $\varphi(0)=2$ 知 $C=2$，故所求曲线方程为
$$x=2e^{\frac{\pi}{6}y}.$$

解法 2 (Ⅰ)在 t 时刻液面的面积为
$$2^2\pi+\pi t.$$
由题意知 $\pi x^2=4\pi+\pi t$，于是 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系为
$$\varphi^2(y)=4+t.$$

(Ⅱ)设液面高度为 y，在 t 时刻到 $t+dt$ 时刻，液体体积的变化即体积微元满足

$$3\mathrm{d}t=(4\pi+\pi t)\mathrm{d}y.$$

解此微分方程得
$$y=\frac{3}{\pi}\ln(4+t)+C.$$

当 $t=0$ 时，$y=0$，得 $C=-\frac{3}{\pi}\ln 4$，从而 $y=\frac{3}{\pi}\ln\frac{4+t}{4}$. 由 $t=\varphi^2(y)-4$ 得 $y=\frac{3}{\pi}\ln\frac{x^2}{4}$. 考虑到 $\varphi(0)=2$，故所求曲线方程为

$$x=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}.$$

70 [2015]　已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比. 现将一初始温度为 120 ℃的物体在 20 ℃恒温介质中冷却，30 min后该物体温度降至 30 ℃，若要将该物体的温度继续降至 21 ℃，还需冷却多长时间?

解　设该物体在 t 时刻的温度为 $T(t)$ ℃，由题意得
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20),$$
其中 k 为比例系数，$k>0$. 解得
$$T=C\mathrm{e}^{-kt}+20.$$

将初始条件 $T(0)=120$ 代入上式，解得 $C=100$. 故
$$T=100\mathrm{e}^{-kt}+20.$$

将 $t=30, T=30$ 代入上式得 $k=\frac{\ln 10}{30}$. 所以
$$T=100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20.$$

令 $T=21$，得 $t=60$. 因此要降至 21 ℃，还需 $60-30=30$(min).

6.6.4　按牛顿第二定律列方程

71 [1998]　从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始垂直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ. 仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

解　取沉放点为原点 O，Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得
$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=mg-B\rho-kv. \tag{*}$$

这是 y 对 t 的二阶可降阶的微分方程，其中 $v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 按典型的降阶办法，
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v,\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y},$$

(*)式化为
$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=mg-B\rho-kv.$$

按分离变量办法解之：
$$\mathrm{d}y=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}\mathrm{d}v,$$
$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C.$$

初始条件为 $v\Big|_{y=0}=0$，求出
$$C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho),$$

故所求函数关系为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}.$$

72 [2004] 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下．现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h．经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$)．问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

解 由题设，飞机的质量 $m=9\ 000$ kg，着陆时的水平速度 $v_0=700$ km/h．从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$．

根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv,$$

又

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

由以上二式得

$$\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v,$$

积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v(t)+C$．由于 $v(0)=v_0, x(0)=0$，故得 $C=\frac{m}{k}v_0$，从而

$$x(t)=\frac{m}{k}[v_0-v(t)].$$

当 $v(t)\to0$ 时，

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9\ 000\times700}{6.0\times10^6}=1.05(\mathrm{km}),$$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05 km．

第二部分　线性代数

第1章　行列式

考点分布

分值 考点 \ 年份	99	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计(99—17年)
数字型行列式	3															4				7
抽象性行列式						4	4	4				4								16

1999—2017年

注:1987—1998年未考行列式

1.1　数字型行列式的计算

几个常用的行列式:

1. 上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

如果 A 与 B 分别是 m 阶和 n 阶矩阵,则

$$\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|,$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|.$$

4. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

数字型行列式的计算主要是利用展开公式,但在展开前往往要先对其利用行列式的性质作一些恒等变形,以希望某行(列)有较多的0出现,同时要结合上面列举的几个常用行列式进行计算.

1 [1999] 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

答 应选(B).

解 此题实质上是计算行列式，看计算出的 x 的多项式次数是多少. 在计算过程中要充分运用行列式的性质.

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1).$$

由此可知 $f(x)$ 是 2 次多项式，故应选(B).

注 不要错误的认为 $f(x)$ 一定是 4 次多项式.

2 [2008 局部] 设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

(Ⅰ)**证法 1** 记

$$D_n=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

以下用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，结论成立；

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$，结论成立.

假设结论对于 $n<k$ 的情况成立. 则当 $n=k$ 时，将 D_k 按第 1 行展开得

$$D_k=2aD_{k-1}-\begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(k-1)\times(k-1)}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}$$

$$=2a\cdot ka^{k-1}-a^2\cdot(k-1)a^{k-2}=(k+1)a^k,$$

即证得$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

证法 2 利用递推关系.

记 $D_n=|\boldsymbol{A}|$，则 $D_1=2a, D_2=3a^2$，按照第一列展开，得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$. 于是

$$D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})$$
$$=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n,$$

则
$$D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n+a^2D_{n-2}=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2$$
$$=(n-2)a^n+a^{n-2}\cdot 3a^2=(n+1)a^n.$$

注 本题是“三对角线”型 n 阶行列式，一般可以采用递推法或者数学归纳法，当然本题还可以利用行列式的性质将其化为“上三角行列式”，留给读者自练.

3 [2014] 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$

(A) $(ad-bc)^2$.　　　　(B) $-(ad-bc)^2$.

(C) $a^2d^2-b^2c^2$.　　　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

答 应选(B).

解法 1 用行列式的性质与公式计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2\leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}=(bc-ad)(ad-bc)=-(ad-bc)^2.$$

解法 2 用行列式的性质与按一行(列)展开定理计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=a(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}+c(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-(ad-bc)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-(ad-bc)^2.$$

注 解法 1 中利用了“1.1 考点点睛”中的“3. 两个特殊的拉普拉斯展开式”.

1.2 抽象型行列式的计算

常用的公式:

(1)设 A 是 n 阶矩阵,则 $|A|=|A^T|$.

(2)设 A 是 n 阶矩阵,则 $|kA|=k^n|A|$.

(3)设 A,B 都是 n 阶矩阵,则 $|AB|=|A||B|$.

(4)设 A 是 n 阶矩阵,则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

(5)设 A 是 n 阶可逆矩阵,则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

(6)设 A 是 n 阶矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是其特征值,则 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(7)设 A 相似于 B,则 $|A|=|B|$.

4 [2003] 设 3 阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵,若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,则 $|B|=$________.

答 应填 $\frac{1}{2}$.

解 由 $A^2B-A-B=E$ 得

$$(A^2-E)B=A+E,\text{即}(A+E)(A-E)B=A+E.$$

而 $A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵,所以有

$$(A-E)B=E,$$

由此得

$$B=(A-E)^{-1}.$$

又

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix},$$

故

$$|A-E|=2,$$

因此

$$|B|=|(A-E)^{-1}|=|A-E|^{-1}=\frac{1}{2}.$$

5 [2004] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵,E 是单位矩阵,则 $|B|=$________.

答 应填 $\frac{1}{9}$.

解 由 $ABA^*=2BA^*+E$ 知,$(A-2E)BA^*=E$,$B=(A-2E)^{-1}(A^*)^{-1}$,故 $|B|=|A^*|^{-1}|A-2E|^{-1}$. 由 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=3$ 知 $|A^*|=9$,$|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$,于是 $|B|=\frac{1}{9}$.

注 也可由 $(A-2E)BA^*=E$ 直接两端取行列式,不必具体解出 B.

6 [2005]　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$________.

答　应填 2.

解法 1　利用行列式的性质计算.

$$|B|\xrightarrow[c_2-c_1]{c_3-c_2}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|A|=2.$$

解法 2　利用矩阵的性质计算.

$$B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

则　$$|B|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2^2&3^2\end{vmatrix}=1\times(2-1)\times(3-1)\times(3-2)=2.$$

注　解法 2 中用到了"1.1 考点点睛"中的"4. 范德蒙德行列式".

7 [2006]　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$________.

答　应填 2.

解　由题设等式得

$$B(A-E)=2E,$$

从而 $$|B(A-E)|=|2E|,$$

即 $$|B||A-E|=2^2=4.$$

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=2$.

8 [2008]　设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$________.

答　应填 -1.

解　因为 $|A|=6\lambda$，故有

$$-48=|2A|=8|A|=48\lambda,$$

所以 $\lambda=-1$.

9 [2010]　设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$________.

答　应填 3.

解　因为

$$|A|\cdot|A^{-1}+B|=|A(A^{-1}+B)|=|E+AB|=|(B^{-1}+A)B|=|B^{-1}+A|\cdot|B|,$$

即

$$2|B^{-1}+A|=6,$$

所以 $|A+B^{-1}|=3$.

注　对于 $|A+B|$ 型行列式，一般是恒等变形转化为乘积的形式，其中单位矩阵 E 恒等变形是一个常用技巧.

10 [2012]　设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵. 若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，则 $|BA^*|=$________.

答　应填 -27.

解　由题意知 $|B|=-|A|$，而 $|A^*|=|A|^2$，故

$$|BA^*|=|B|\cdot|A^*|=-|A|^3=-27.$$

11 [2013] 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$________.

答 应填 -1.

解 由 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$ 知，A 的伴随矩阵 A^* 满足

$$A^*=-A^{\mathrm{T}} \text{ 及 } |A^*|=(-1)^3|A^{\mathrm{T}}|=-|A|,$$

再由

$$|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2,$$

得

$$|A|^2+|A|=0.$$

最后，由行列式的展开定理得

$$\begin{aligned}|A|&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\\&=-(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2),\ i=1,2,3,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}3|A|&=-\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2)\\&=-\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}^2.\end{aligned}$$

因为 A 是非零矩阵，所以 $|A|\neq 0$. 综上，得

$$|A|+1=0，即 |A|=-1.$$

注 进一步可知 A 是正交矩阵，本题实际上是改编自下面的 1994 年数学一的一道考题.

12 [2015] 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1$，$B=A^2-A+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|B|=$________.

答 应填 21.

解 A 的特征值为 $2,-2,1$，则 B 的特征值分别对应为 $3,7,1$，所以 $|B|=21$.

注 也可设 A 是对角线元素为 $2,-2,1$ 的对角矩阵，则 B 是对角线元素为 $3,7,1$ 的对角矩阵，可得 $|B|=21$.

1.3 克拉默法则

13 [2008 局部] 设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

（Ⅲ）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

（Ⅰ）**证** 证明见 1.1 第 2 题.

（Ⅱ）**解** 由（Ⅰ）知当 $a\neq 0$ 时，$|A|\neq 0$，故方程组 $Ax=b$ 有唯一解.

根据克拉默法则，将 $|A|$ 的第 1 列换成 b，得行列式

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

由(Ⅰ)知$|A_1|=na^{n-1}$,故

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}.$$

(Ⅲ)解　当$a=0$时,方程组$Ax=b$为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

此方程组的增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

显然其秩与方程组系数矩阵的秩均为$n-1$,因而方程组有无穷多解,方程组(*)对应的齐次方程组

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系为$\boldsymbol{\xi}=(1,0,\cdots,0)^T$;方程组(*)的一个特解为$\boldsymbol{\eta}=(0,1,0,\cdots,0)^T$,从而方程组(*)的通解为

$$x=(0,1,0,\cdots,0)^T+k(1,0,\cdots,0)^T,其中 k 为任意常数.$$

1.4　$|A|$是否为0

考点点睛

$|A_{n\times n}|=0\Leftrightarrow r(A)<n\Leftrightarrow Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow 0$是$A$的特征值$\Leftrightarrow A$的行(列)向量组线性相关.有时也可以采用反证法:假设$|A|\neq 0$,则A可逆,用A^{-1}找矛盾,最后也要注意到$|A|$是一个数,如果能说明$|A|=k|A|$,$k\neq 1$,则也可得出$|A|=0$.

14 [1994—Ⅰ]　设A为n阶非零方阵,A^*是A的伴随矩阵,A^T是A的转置矩阵.当$A^*=A^T$时,证明$|A|\neq 0$.

证法1　设$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$,其中$\alpha_i$为$A$的行向量$(1\leqslant i\leqslant n)$,则$A^T=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_n^T)$.由公式$AA^*=|A|E$,故

根据已知，有 $AA^{\mathrm{T}}=|A|E$.

(反证法)如果 $|A|=0$，由上，有

$$O=AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}&\alpha_1\alpha_2^{\mathrm{T}}&\cdots&\alpha_1\alpha_n^{\mathrm{T}}\\\alpha_2\alpha_1^{\mathrm{T}}&\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}&\cdots&\alpha_2\alpha_n^{\mathrm{T}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n\alpha_1^{\mathrm{T}}&\alpha_n\alpha_2^{\mathrm{T}}&\cdots&\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

则 $\alpha_i\alpha_i^{\mathrm{T}}=0(i=1,2,\cdots,n)$，即 $\|\alpha_i\|^2=0$，故所有 $\alpha_i=0$，即 $A=O$，这与 A 是非零矩阵矛盾，故 $|A|\neq0$.

证法 2 $A^*=A^{\mathrm{T}}$，则 $A_{ij}=a_{ij}$，由于 A 是非零矩阵，不妨设 $a_{11}\neq0$，按照第一行展开，有 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2>0$，故 $|A|\neq0$.

15 [1999 数学一] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则

(A)当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq0$.　　(B)当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

(C)当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq0$.　　(D)当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

答 应选(B).

解 由各选项可见，主要区分行列式不为零与为零的情形. 而题中并未给出 A 与 B 的具体形式，所以无法用计算来回答. 方阵的行列式不为零(为零)等价于该方阵满秩(不满秩). 故用秩的办法来讨论.

AB 为 m 阶方阵，

$$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}\leqslant\min\{m,n\},$$

当 $m>n$ 时，由上式有 $r(AB)\leqslant n<m$，即 AB 不是满秩的，所以 $|AB|=0$. 故选(B).

第 2 章　矩阵

考点分布

分值 年份 考点	97	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计 (97—17 年)
矩阵运算及逆矩阵，矩阵方程	5	5	6	3	6	6	8					4	4			4			11			62
伴随矩阵		3							4				4			4	4					19
初等变换与等价方阵								4		4					4							12
矩阵的秩											4									4		8

1997—2017 年

注:1987—1996 年未考线性代数

2.1　幂运算

考点点睛

A 是 n 阶矩阵，

(1)若 $r(A)=1$，则 $A^n=l^{n-1}A,\ l=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$(迹)；

$r(A)=1\Leftrightarrow A=\alpha\beta^{T}$($\alpha,\beta$ 是非零列向量).

(2)若 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$.

(3)若 $A=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$A^3=A^4=\cdots=O$.

(4)若 A 可拆成两个方阵 B 与 C 之和且 B,C 可交换，而 C 的幂又能快速降为 O(如 $C^3=O$)，则有

$$A^n=(B+C)^n=B^n+C_n^1B^{n-1}C+C_n^2B^{n-2}C^2.$$

(5)先求 A^2，A^3 等，然后看出规律，利用归纳法求 A^n.

1 [1994—Ⅰ]　已知 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设 $A=\alpha^{T}\beta$，其中 α^{T} 是 α 的转置，则 $A^n=$______.

答　应填 $3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$.

解　因为 $\beta\alpha^{T}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$，应用矩阵乘法的结合律，得

$$A^n = \underbrace{AA\cdots AA}_{n个} = (\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta) = \alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{n-1个}\beta = \alpha^T 3^{n-1}\beta = 3^{n-1}\alpha^T\beta$$

$$= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

注 若 α,β 都是 n 维非零列向量,则 $A=\alpha\beta^T$ 和 $B=\beta\alpha^T$ 是两个互为转置的秩为 1 的方阵,而 $\alpha^T\beta$ 和 $\beta^T\alpha$ 是两个相等的数(这个数就是矩阵 $A=\alpha\beta^T$ 的迹),则 $A^n=l^{n-1}A=(\alpha^T\beta)^{n-1}A$.

2 [1999 数学三] 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,而 $n\geqslant 2$ 为正整数,则 $A^n-2A^{n-1}=$________.

答 应填 $O_{3\times 3}$(即 3×3 阶零矩阵).

解 由于 $A^2=2A$,故 $A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-2A)=O$. 计算矩阵 A 的高次幂阵,通常要找出规律,从而简化运算.

注 先求出 A^2,A^3 等低次幂阵,找出规律.

2.2 伴随矩阵

考点点睛

伴随矩阵有关公式小结(假设以下表达式有意义):

(1)$AA^*=A^*A=|A|E$(核心公式).

(2)$|A^*|=|A|^{n-1}$.

(3)$(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

(4)$(A^*)^*=|A|^{n-2}\cdot A$.

(5)$(AB)^*=B^*A^*$.

(6)$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$,$(A^*)^T=(A^T)^*$,$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

(7)$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$

3 [1998] 设 A 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵,A^* 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k\neq 0,\pm 1$,则必有 $(kA)^*=$

(A)kA^*. (B)$k^{n-1}A^*$. (C)k^nA^*. (D)$k^{-1}A^*$.

答 应选(B).

解法 1 本题考查数与矩阵的乘法及伴随矩阵的概念. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,其元素 a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij},则矩阵 $kA=(ka_{ij})_{n\times n}$. 若其元素 ka_{ij} 的代数余子式记作 $\Delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则由行列式性质,知

$$\Delta_{ij}=k^{n-1}A_{ij},i,j=1,2,\cdots,n.$$

再由伴随矩阵的定义知 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$,可知(B)项正确. 该题较简单,所以得分率偏高. 题中对 n 和 k 的限制(除 $k\neq 0$)是为了做到 4 个选项只有 1 个是正确的.

解法 2 不妨加强条件设 A 可逆,$(kA)(kA)^*=(kA)^*(kA)=|kA|E=k^n|A|E$,于是

$$(kA)^*=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*.$$

注　解法 2 中利用了 $AA^*=A^*A=|A|E$ 这一有关伴随矩阵的核心公式.

4 [2009]　设 A,B 均为 2 阶方阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵. 若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

答　应选(B).

解法 1　对任一 n 阶矩阵 C，有

$$C^*C=CC^*=|C|E,$$

其中 C^* 是 C 的伴随矩阵. 因此可直接用乘法验证，排除错误选项.

对选项(A)，有

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2AA^* & O \\ O & 3BB^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4E_2 & \\ & 9E_2 \end{pmatrix},$$

E_2 为 2 阶单位矩阵；

对选项(B)，有

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6E_2 & \\ & 6E_2 \end{pmatrix}=6E_4=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}E_4,$$

E_4 为 4 阶单位矩阵；

对选项(C)，(D)，分别有

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2AB^* & O \\ O & 3BA^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3AB^* & O \\ O & 2BA^* \end{pmatrix}.$$

由此知选项(B)正确.

解法 2　设

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}.$$

分别求出 X_1,X_2,X_3,X_4. 因为

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX_3 & AX_4 \\ BX_1 & BX_2 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix},$$

所以 $BX_1=O$，$AX_4=O$，由已知 A,B 均可逆，故 $X_1=X_4=O$；另一方面，有

$$AX_3=BX_2=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}E_2,$$

其中 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A|\cdot|B|=6$，故得

$$X_3=6A^{-1}=6\frac{A^*}{|A|}=3A^*,$$

$$X_2=6B^{-1}=6\frac{B^*}{|B|}=2B^*.$$

解法 3　$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A|\cdot|B|=6$，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆，于是

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2\times 3B^{-1} \\ 3\times 2A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix},$$

选(B).

2.3 逆矩阵

考点点睛

1. 求逆的基本方法

(1)定义法:若A,B均是n阶方阵,$AB=E$,则A可逆且$A^{-1}=B$.

(2)利用伴随矩阵:$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$.

(3)初等变换法:$(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{r}(E\,\vdots\,A^{-1})$,$\begin{pmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}E\\ \cdots\\ A^{-1}\end{pmatrix}$.

(4)利用公式

$$\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}.$$

其中定义法往往用于求抽象阵的逆,利用伴随矩阵求逆往往是当矩阵阶数较低时合适,而初等变换法是求逆的最广泛的方法,求逆是一种基本计算能力的体现,一定要做到快、准、稳.

2. 证明n阶矩阵A可逆的方法

(1)存在n阶矩阵B,使得$AB=E$(或者$BA=E$).

(2)$|A|\neq 0$或$r(A)=n$.

(3)A的列向量组(或行向量组)线性无关.

(4)$Ax=0$只有零解.

(5)对任意的b,$Ax=b$总有唯一解.

(6)0不是A的特征值.

5 [2000] 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{pmatrix}$,$E$为4阶单位矩阵,且$B=(E+A)^{-1}(E-A)$,则$(E+B)^{-1}=$______.

答 应填$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

解 此类填空题,总是先进行符号推导再代入数字运算.

因为
$$\begin{aligned}B+E&=(E+A)^{-1}(E-A)+E\\&=(E+A)^{-1}(E-A+E+A)\\&=2(E+A)^{-1},\end{aligned}$$

所以
$$(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

注 本题利用了单位矩阵E恒等变形的技巧.

6 [2008] 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $A^3=O$，则

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

答 应选(C).

解法 1 因为 $A^3=O$，故

$$E=E\pm A^3=(E\pm A)(E\mp A+A^2),$$

即分别存在矩阵 $E-A+A^2$ 和 $E+A+A^2$ 使

$$(E+A)(E-A+A^2)=E,$$
$$(E-A)(E+A+A^2)=E,$$

可知 $E-A$ 与 $E+A$ 都是可逆的，所以应选(C).

解法 2 设 λ 是 A 的特征值，由 $A^3=O$，得 $\lambda^3=0\Rightarrow\lambda=0$($n$ 重)，于是 $E-A$ 的特征值是 1(n 重)，$E+A$ 的特征值是 1(n 重)，故二者均可逆.

注 解法 1 是利用的定义法，解法 2 是说明 0 不是特征值.

2.4 初等变换

考点点睛

对初等变换要把握两点：

(1)左边乘初等矩阵(相当于对行作初等变换)，右边乘初等矩阵(相当于对列作初等变换)的问题.

(2)初等矩阵的逆的问题.

7 [2004] 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

答 应选(D).

解 由题意知，$Q=E_{12}E_{32}(1)$，其中

$$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},E_{32}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故
$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

即选项(D)正确.

8 [2005] 设 A 为 $n(n\geqslant2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，A^*，B^* 分别为 A，B 的伴随矩阵，则

(A)交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.　　(B)交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C)交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.　　(D)交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

答 应选(C).

解 由题设知 $B=E_{12}A$，其中 E_{12} 是将矩阵第 1 行(列)与第 2 行(列)交换的初等变换所对应的初等矩阵，因而

$$B^{-1}=A^{-1}E_{12}^{-1}.$$

由于

$$E_{12}^{-1}=E_{12},B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^*,A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

且$|B|=-|A|$,所以

$$-B^*=A^*E_{12},$$

而E_{12}右乘矩阵A^*,就是将A^*的第1列与第2列交换.因而选项(C)是正确的.

注 不少考生选(A),是忽略了伴随矩阵与逆矩阵的差别,或者是虽注意到了它们的不同,但没有考虑$|B|=-|A|$.也有一些考生选(B),则反映了他们仍然没有把矩阵的伴随矩阵的结构弄清楚,这是一个老问题,但每年都有考生犯这一类错误.可见扎实基础的重要性.

9 [2006] 设A为3阶矩阵,将A的第2行加到第1行得B,再将B的第1列的-1倍加到第2列得C,记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

(A)$C=P^{-1}AP$. (B)$C=PAP^{-1}$. (C)$C=P^{T}AP$. (D)$C=PAP^{T}$.

答 应选(B).

解 由题设知$B=PA$,$C=BQ$,其中初等矩阵$Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,于是有

$$C=PAQ.$$

不难验证$PQ=E$,即$Q=P^{-1}$,从而$C=PAP^{-1}$,即选项(B)正确.

10 [2009] 设A,P均为3阶矩阵,P^T为P的转置矩阵,且$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$,则$Q^TAQ$为

(A)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

答 应选(A).

解 对矩阵P作初等列变换:把第2列加到第1列上,便可得到矩阵Q.若记$E_{12}(1)$为上述初等变换所对应的初等矩阵,则$Q=PE_{12}(1)$,其中

$$E_{12}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}Q^TAQ&=E_{12}^T(1)P^TAPE_{12}(1)\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

选项(A)正确.

11 [2011] 设A为3阶矩阵,将A的第2列加到第1列得矩阵B,再交换B的第2行与第3行得单

位矩阵. 记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则 $A=$

(A) P_1P_2.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

答　应选(D).

解　本题考查矩阵的初等变换与初等矩阵. 由题设条件知, 矩阵 P_1, P_2 正是与题中所给初等变换相对应的初等矩阵. 根据初等矩阵的性质, 有 $B=AP_1$ 和 $E=P_2B$, 从而 $E=P_2AP_1$, 即 $A=P_2^{-1}P_1^{-1}$. 而 $P_2^{-1}=P_2$, 故有 $A=P_2P_1^{-1}$, 即选项(D)是正确的.

注　对于初等变换要会用初等矩阵来描述.

2.5　矩阵方程

矩阵方程常见的有三种: $AX=C$, $XA=C$, $AXB=C$.

(1) 若 A 或 A, B 可逆时, 则可直接得上述三种形式下的解: $X=A^{-1}C$, $X=CA^{-1}$, $X=A^{-1}CB^{-1}$.

(2) 若 A 不可逆, 则对矩阵方程 $AX=C$ 求解应转化为相应的非齐次线性方程组处理. (详见后文 4.2 的 2014 年考题)

(3) 若无法转化为上述三种形式时, 可直接利用元素法, 把未知矩阵 X 的具体元素设出来, 代入等式中, 建立方程, 从而求得 X. (详见后文 4.2 的 2013 年考题)

12 [1997]　已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 且 $A^2-AB=E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵, 求矩阵 B.

解　由 $A^2-AB=A(A-B)=E$, 及 $|A|=-1\neq0$, 知 $A-B=A^{-1}$,

即
$$B=A-A^{-1},$$

又
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

从而
$$B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

13 [1998]　设 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵, A^{T} 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵.

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

求 A.

解　由题设得

$$C(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=E,$$

即
$$(2C-B)A^{T}=E.$$

由于
$$2C-B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},|2C-B|=1\neq 0,$$

故 $2C-B$ 可逆，
于是
$$A=[(2C-B)^{-1}]^{T}=[(2C-B)^{T}]^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

注　求解这类矩阵方程要试着尽可能的先化简，再去作具体数字运算.

14 [1999]　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^{*}X=A^{-1}+2X$，其中 A^{*} 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

解　由原等式得 $(A^{*}-2E)X=A^{-1}$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，用矩阵 A 左边乘等式两端，得
$$(|A|E-2A)X=E,$$
可见 $|A|E-2A$ 可逆，从而
$$X=(|A|E-2A)^{-1}.$$

由于
$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4,$$
$$|A|E-2A=2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix},$$

故
$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

15 [2001]　已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，求 X.

解　由题设的关系式得
$$AX(A-B)+BX(B-A)=E,$$
即
$$(A-B)X(A-B)=E.$$

由于行列式 $|A-B|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0$，所以矩阵 $A-B$ 可逆，且
$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故
$$X=[(A-B)^{-1}]^2$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

16[2002] 已知 A,B 为 3 阶矩阵,且满足 $2A^{-1}B=B-4E$,其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)证明:矩阵 $A-2E$ 可逆;

(Ⅱ)若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 A.

(Ⅰ)证 由 $2A^{-1}B=B-4E$ 知
$$AB-4A-2B=O,$$
从而 $(A-2E)(B-4E)=8E$ 或 $(A-2E)\cdot\frac{1}{8}(B-4E)=E$,从而 $A-2E$ 可逆,且
$$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E).$$

(Ⅱ)解 由(Ⅰ)知
$$A=2B(B-4E)^{-1},$$
而
$$(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$
故
$$A=2\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

17[2003] 设 α 为 3 维列向量,α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\alpha^T\alpha=$________.

答 应填 3.

解 设 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}x_1^2&x_1x_2&x_1x_3\\x_2x_1&x_2^2&x_2x_3\\x_3x_1&x_3x_2&x_3^2\end{pmatrix}$. 由题设知 $x_1^2=x_2^2=x_3^2=1$,故 $\alpha^T\alpha=x_1^2+x_2^2+x_3^2=3$.

注 $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的方阵,$\alpha^T\alpha$ 是一个数,且这个数 $\alpha^T\alpha$ 就是方阵 $\alpha\alpha^T$ 的迹,于是直接有
$$\alpha^T\alpha=1+1+1=3.$$

18[2015] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$,且 $A^3=O$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵,求 X.

解 (Ⅰ)由于 $A^3=O$,所以

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3=0,$$

于是 $a=0$.

(Ⅱ)由于

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},$$

所以

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}.$$

由(Ⅰ)知

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 均可逆,所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1} \\ &=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.6 矩阵的秩

考点点睛

秩是线性代数的核心,贯穿始终,考生要学会在各种情况下定出 $\boldsymbol{A}$ 的秩,常用的方法主要有:

(1)$\boldsymbol{A}$ 中存在一个 2 阶子式不为 0,则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

(2)若 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$,则 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s})=r(\boldsymbol{B})$,即左边乘列满秩矩阵,不改变矩阵的秩.

(3)$r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩$=\boldsymbol{A}$ 的列秩.

(4)初等变换不改变 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

(5)$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min\{m,n\}$.

(6)$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}),k\neq 0$.

(7)$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

(8)$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(9)若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

(10)$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中存在 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解向量.

(11)$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

(12)若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,且 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 i 重特征值,则 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-i$.

(13)若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

19 [2007] 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

答 应填 1.

解 因为

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为 1.

计算 $\boldsymbol{A}^3$，可以直接由乘法得到，这是最基本的方法，应熟练掌握. 此外，也可由这种矩阵方幂的规律得到：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times n}$，则

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{n\times n},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&&0&0\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}.$$

20 [2016] 设矩阵 $\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$________.

答 应填 2.

解 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

因为 $r(\boldsymbol{B})=r\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=2$，因此 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$.

当 $a=-1$ 时，易见 $r(\boldsymbol{A})=1$.

所以当 $a=2$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价.

第3章 向量

考点分布

考点＼分值＼年份	97	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计(97—17年)
线性相关与线性无关			8			3	4	4		4	4		3			4		4				42
极大无关组与秩	3			7										4								14
等价向量组									9						11		4					24

1997—2017年

注：除1988年有一道4分的选择题考查线性相关与线性无关外，1987—1996年其余均未考线性代数

3.1 线性相关与线性无关

考点点睛

1. n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关的充要条件

存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}$有非零解.

2. n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充要条件

当且仅当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时才有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}$只有零解.

3. 常用的判别向量组线性相关、线性无关的结论

(1)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则对其增加向量个数或相应减少原向量维数后所得到向量组仍线性相关.

(2)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则对其缩减向量个数或增加原向量维数后所得到向量组仍线性无关.

(3)以少表多，则多必相关.

例如：若向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性表示，且$s>t$，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关.

(4)$n+1$个n维列向量必线性相关.

(5)不同特征值对应的特征向量线性无关.

1 [1988—Ⅲ] n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是

(A)有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq 0$.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不能用其余向量线性表示.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示.

答 应选(D).

解 此为"向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示的充分必要条件是向量组线性相关"的逆否命题.

注 要区分"存在"与"任意"的两种表述.

2 [2002] 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则对于任意常数 k,必有

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. (D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

答 应选(A).

解 取 $k=0$ 时,(B)和(C)都错. 而取 $k\neq 0$ 时,(D)亦错.

不妨取 $k=1$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关,则由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;又 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,所以 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,与题设矛盾. 所以(A)是正确的. 事实上,设

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4(k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\mathbf{0}.$$

若 $\lambda_4=0$,则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,必有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关;

若 $\lambda_4\neq 0$,则 $k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,从而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,与题设矛盾. 总之 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 是线性无关的.

3 [2003] 设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则

(A)当 $r<s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关. (B)当 $r>s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.

(C)当 $r<s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关. (D)当 $r>s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关.

答 应选(D).

解 因为向量组Ⅰ可由Ⅱ线性表示,它们的秩满足

$$r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})\leqslant s,$$

故当 $r>s$ 时,$r(\text{Ⅰ})<r$,故Ⅰ必线性相关,于是选(D).

注 若是能想到"以少表多,则多必相关",可直接选(D).

4 [2004] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵,则必有

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

答 应选(A).

解法1 若设 $\boldsymbol{A}=(1,0)$,$\boldsymbol{B}=(0,1)^{\mathrm{T}}$,显然 $\boldsymbol{AB}=0$,但矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,行向量组线性无关;矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关,列向量组线性无关. 由此就可断言选项(A)正确.

不少考生选(D),其原因就是对齐次线性方程组有非零解的条件理解不透彻. 事实上,若设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 便可写成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

所以,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. 由已知条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$,因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是非零矩阵,这表明齐次方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解,所以矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的

列向量组也就是 B 的行向量组线性相关.

解法 2 不妨设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$, 由 $AB=O$, 则 $r(A)+r(B)\leqslant n$, 且 $A\neq O$, $B\neq O$, 则 $r(A)\geqslant 1$, $r(B)\geqslant 1$, 所以有 $r(A)<n$(A 的列), $r(B)<n$(B 的行), 故选(A).

5 [2005] 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$.　　(B) $\lambda_2\neq 0$.　　(C) $\lambda_1=0$.　　(D) $\lambda_2=0$.

答 应选(B).

解 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}$, 则有

$$(k_1+\lambda_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应于 A 的两个不同特征值的特征向量, 所以它们线性无关, 即必有

$$\begin{cases}k_1+\lambda_1k_2=0,\\ \lambda_2k_2=0,\end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是上述关于 k_1,k_2 的齐次线性方程组只有零解, 这等价于其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}\neq 0,$$

即 $\lambda_2\neq 0$, 故选(B).

6 [2006] 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

答 应选(A).

解 取 $A=O$, 则选项(B)与(D)不成立; 若矩阵 A 的秩为 n, 选项(C)不成立, 所以应选(A).

事实上, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 所以存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

从而有

$$A(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0},$$

即

$$k_1A\boldsymbol{\alpha}_1+k_2A\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_sA\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

由此可知存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使上式成立, 所以 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 即选项(A)是正确的.

注 还可以用秩来判定, $r(A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s)=r(A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s))\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$, 则 $r(A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s)<s$, 故此时 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 故选(A).

7 [2007] 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

答 应选(A).

解 事实上, 选项(A)中的 3 个向量之和 $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$, 即这 3 个向量是线性相关的. 至于其他 3 个向量组是否线性无关, 可由以下结论做检验: 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 则向量组

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)A$$

线性无关的充要条件是 r 阶方阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$. 选项(B),(C),(D)中的向量组分别有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},$$

不难算出：

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0,\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}=-7\neq0,\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=9\neq0,$$

可知选项(B),(C),(D)的向量组都是线性无关的. 事实上，选项(A)的向量组也有相应的表示：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=0,$$

即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，即知选项(A)是正确的.

8 [2008]　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

(Ⅰ)证　设存在数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\qquad①$$

用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘①式的两边，并由题设知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}.\qquad②$$

①－②得

$$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，从而 $k_1=k_3=0$. 代入①式有 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$. 而 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_2=0$. 综上，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(Ⅱ)解　由题设有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，从而

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

9 [2010]　设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是

(A)若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\leqslant s$.　　(B)若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$.

(C)若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\leqslant s$.　　(D)若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$.

答　应选(A).

解　事实上，由向量组Ⅰ线性无关知其秩 $r(\text{Ⅰ})=r$，又向量组Ⅱ的秩 $r(\text{Ⅱ})\leqslant s$，由于Ⅰ可由Ⅱ表示，则

$$r=r(\mathrm{I})\leqslant r(\mathrm{II})\leqslant s,$$

即 $r\leqslant s$.

也可通过举反例来否定其他选项：

当向量组Ⅰ只包含$(0,0)^T$,向量组Ⅱ由$(1,0)^T$与$(0,0)^T$组成时,便否定了选项(B),(D)；

当向量组Ⅰ由$(1,0)^T$与$(0,0)^T$组成,向量组Ⅱ只包含$(1,0)^T$时,也否定了选项(C).

综上,应选(A).

注 本题实际上就是对"以少表多,则多必相关"这个结论的逆否命题的考查,即:若向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性表示且向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关,则$s\leqslant t$.可直接选(A).

10 [2012] 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

答 应选(C).

解 首先,当$c_1=1$时,行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-1,|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|=1,$$

所以此时向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$都线性无关,即选项(A)与(B)不能选.

其次,当$c_2=0,c_3=c_4=1$时,行列式$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=-2$,即此时向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$也是线性无关的,选项(D)也不能选,故选(C).

事实上,当$c_1=0$时,由于$\boldsymbol{\alpha}_1$为零向量,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关;当$c_1\neq0$时,有

$$(c_3+c_4)\boldsymbol{\alpha}_1-c_1(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathbf{0},$$

所以,对任意的常数c_1,c_3,c_4而言,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$都是线性相关的.这证明了应选(C).

注 也可以考查行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|$是否为0.

11 [2014] 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为3维向量,则对任意常数$k,l$,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的

(A)必要非充分条件.　　(B)充分非必要条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分也非必要条件.

答 应选(A).

解 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,设$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$,即$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(k\lambda_1+l\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,则$\lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0$,从而$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.反之若$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,不一定有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

显然,$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.故$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的必要条件,而不是充分条件.因此选(A).

注 这是一道选择题,直接取$k=l=0$,此时显然向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的必要非充分条件.

3.2 线性表出

1. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的充要条件

存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$.

2. 有关线性表出的常用结论

(1)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表出式唯一.

(2)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则至少存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由其余的 $s-1$ 个向量线性表出.

(3)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则其中任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都不可由其余的 $s-1$ 个向量线性表出.

3. 等价向量组

向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可相互表出，则称向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价.

4. 向量组等价的必要条件和充要条件

(1)向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价$\Rightarrow r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

(2)向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表出，$r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})\Leftrightarrow$向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价.

5. 向量组等价与矩阵等价的关系

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)_{n\times s}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)_{n\times s}$，向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，则向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价可推出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，反之不对.

12 [1998] 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$，问

(Ⅰ)a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(Ⅱ)a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？并写出此表达式.

解 因为

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}.$$

所以

(Ⅰ)当 $b\neq2$ 时，线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(Ⅱ)当 $b=2,a\neq1$ 时，线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解：

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},$$

于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$；

当 $b=2,a=1$ 时，线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解：

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}+(-1,2,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数，这时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3.$$

13 [2000] 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

解 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是它的一个极大线性无关组.

由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的秩，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而

$$\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0,$$

由此解得 $a=3b$.

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. 于是

$$\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=0,$$

解之得 $2b-10=0$，于是得 $a=15,b=5$.

14 [2005] 确定常数 a，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})<3$，从而行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)=0,$$

得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,1,4)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即 $a=1$ 符合题意；

当 $a=-2$ 时，则有

$$(\boldsymbol{B}\vdots\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&-6&0&3&-3\\0&0&0&0&-3&3\end{array}\right).$$

考虑非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_2$，由上述可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(\boldsymbol{B})=2$，而秩 $r(\boldsymbol{B}\vdots\boldsymbol{\alpha}_2)=3$，则方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 无解，即 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以 $a=-2$ 不符合题意，应舍去. 综上 $a=1$.

注 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，则三个方程组 $x_{i1}\boldsymbol{\beta}_1+x_{i2}\boldsymbol{\beta}_2+x_{i3}\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 均有解；向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则三个方程组 $x_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{i3}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 至少有一个无解.

15 [2011] 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 (Ⅰ)因为 4 个 3 维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 是线性相关的，所以，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，与题设矛盾，于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而行列式

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$

即 $a=5$.

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,即解3个非齐次线性方程组:

$$x_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{i3}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3).$$

由于3个线性方程组的系数矩阵是相同的,所以令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,并对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

由此可得

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

16 [2013] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则

(A)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价. (B)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价. (D)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

答 应选(B).

解 本题考查向量组等价的概念以及对矩阵与其向量组之间的关系的理解.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为 n 维列向量.由题设有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)\boldsymbol{B}^{-1},$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 能相互线性表示,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组等价,选项(B)正确.

此外,由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆,所以其行向量组与列向量组分别都是线性无关的;而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是任意的 n 阶矩阵,且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的秩相等,所以当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 n 时,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的秩也小于 n,即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与列向量组分别都是线性相关的.由此可知选项(C),(D)都应排除.

最后,由

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组 $(1,1),(0,0)$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组 $(2,1),(0,0)$ 是不等价的,从而选项(A)也是错的.

注 对 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{C}_{m\times s}$,则 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出,$\boldsymbol{C}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出.

3.3 秩、极大线性无关组

考点点睛

1. 极大线性无关组的定义

在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中,若存在部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:

(1)$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关；

(2)向量组中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是原向量组的极大线性无关组.

2. 极大线性无关组的基本性质

(1)向量组的极大线性无关组一般不唯一,但每一个极大线性无关组所含向量个数是一样的.

(2)只由一个零向量组成的向量组不存在极大线性无关组.

(3)一个线性无关向量组的极大线性无关组就是该向量组本身.

(4)一个向量组的任意两个极大线性无关组都是等价向量组.

17 [1997]　已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2,则$t=$________.

答　应填3.

解　由于 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,则矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}$$

的任一个 3 阶子阵的行列式的值为零,即

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&t\\0&-4&5\end{vmatrix}=4t-12=0,t=3.$$

注　也可以直接作初等行变换定出 t.

18 [1999]　设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm T}.$$

(Ⅰ)p 为何值时,该向量组线性无关?并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm T}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示;

(Ⅱ)p 为何值时,该向量组线性相关?并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

解　对矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha})$作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)当 $p\neq2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.此时设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$,解得

$$x_1=2,x_2=\frac{3p-4}{p-2},x_3=1,x_4=\frac{1-p}{p-2},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

(Ⅱ)当 $p=2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.此时,向量组的秩等于 3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$(或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$)为其一个极大线性无关组.

注　对列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 作初等行变换得到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 有着相同的对应关系,即如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的极大线性无关组,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的系数与 $\boldsymbol{\beta}_4$ 由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示的系数相同.

第 4 章　线性方程组

考点分布

考点 \ 分值 \ 年份	97	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（97—17 年）
齐次线性方程组					6			9	9	2					4			4				34
线性表示与非齐次线性方程组	8	6		6	3	6				7		12	8	11		11	11	7	4	11	11	122
两个方程组的公共解问题											11											11
几何或其它应用问题							8															8

1997—2017 年

注：1987—1996 年未考线性代数

4.1　方程组有解无解的判别

1. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$

$A_{m\times n}x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$.

$A_{m\times n}x=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$.

2. 非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$

$A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,b)$.

进一步：$A_{m\times n}x=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,b)=n$.

$A_{m\times n}x=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,b)<n$.

$A_{m\times n}x=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\,\vdots\,b)\Leftrightarrow r(A)+1=r(A\,\vdots\,b)$.

1 [2001]　设方程 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解，则 $a=$________.

答　应填 -2.

解　利用增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，且使其秩小于 3 的方法确定 a 的值.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a+2 & a+2 & a+2 & 0 \end{array}\right),$$

故当 $a=-2$ 时，增广矩阵的秩与系数矩阵的秩都等于 2，从而原方程有无穷多解.

注 不少考生由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0 \Rightarrow a=-2$ 或 $a=1$，这是不对的，因为 $|\boldsymbol{A}|=0$ 这只是意味着 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 没有唯一解，它可能有无穷多解，但也可能无解，实际上 $a=1$ 时方程无解.

2 [2003] 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证：这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

证法 1 考虑方程组

$$\text{I}: \begin{cases} ax+2by+3c=0, \\ bx+2cy+3a=0, \\ cx+2ay+3b=0. \end{cases}$$

由几何意义可知，要么 I 存在唯一解，要么无解，要么存在无穷多解(此时相当于三直线重合).

I 存在唯一解 $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 存在唯一解 $(x_0,y_0,1)^{\mathrm{T}}$. 而当后者存在唯一解 $(x_0,y_0,1)^{\mathrm{T}}$ 时，它是非零解，所以

$$\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=0.$$

展开上式得

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=6(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \\ c & a-c & b-c \end{vmatrix}$$
$$=-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0,$$

因此 $a+b+c=0$.

反之，设 $a+b+c=0$，则

$$\begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

有非零解 $(x_0,y_0,1)^{\mathrm{T}}$，即 l_1,l_2,l_3 有公共点 (x_0,y_0). 但由上面分析，在三直线不重合的前提下，若有公共点 (x_0,y_0)，则必为唯一公共点. 证毕.

证法 2 考虑

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix} \text{与} \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix},$$

三直线相交于一点 $\Leftrightarrow r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2$.

因为 l_1 与 l_2 是不同的直线，所以向量 $(a,2b,3c)$ 与 $(b,2c,3a)$ 对应的分量不成比例，所以 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) \geqslant 2$，但

$r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2\Leftrightarrow|\bar{\boldsymbol{A}}|=0$,即 $a+b+c=0$(见证法 1 的推导).

3 [2015]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\d\\d^2\end{bmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$.　　(B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.　　(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$.　　(D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

答　应选(D).

解　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<3$.

$|\boldsymbol{A}|$ 是一个范德蒙德行列式,值为 $(a-1)(a-2)$. 如果 $a\notin\Omega$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,$r(\boldsymbol{A})=3$. 此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解,排除(A),(B).

类似地,若 $d\notin\Omega$,则 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=3$,排除(C).

当 a,d 都属于 Ω 时,$r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解. 选(D).

4.2　解具体方程组(含参数)

这部分没有什么太大的难题,关键是首先定出系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})$. 其次作初等行变换时要准确、快速,同时对方程中含有的参数讨论要全面、不遗漏.

4 [1997]　λ 取何值时,方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1,\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解,有唯一解或有无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解.

解　原方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\ 4&5&-5\end{vmatrix}=5\lambda^2-\lambda-4=(\lambda-1)(5\lambda+4),$$

故当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 时,方程组有唯一解.

当 $\lambda=1$ 时,原方程组为

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1,\end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}0&3&-3&-3\\1&-1&1&2\\0&9&-9&-9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

因此,当 $\lambda=1$ 时,原方程组有无穷多解,其通解为

$$\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=-1+k,\\ x_3=k,\end{cases}$$

或 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意实数.

当$\lambda=-\frac{4}{5}$时,原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}10x_1-4x_2-5x_3=5,\\4x_1+5x_2-5x_3=-10,\\4x_1+5x_2-5x_3=-1,\end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc:c}10&-4&-5&5\\4&5&-5&-10\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}10&-4&-5&5\\4&5&-5&-10\\0&0&0&9\end{array}\right),$$

由此可知当$\lambda=-\frac{4}{5}$时,原方程组无解.

5 [2000] 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,其中$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{\beta}$的转置,求解方程

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}.$$

解 由题设得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2.$$

又

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}^4=8\boldsymbol{A},$$

代入原方程,得

$$16\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=8\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma},$$

即$8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$(其中$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵).

令$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,代入上式,得到非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-x_1+\frac{1}{2}x_2=0,\\2x_1-x_2=0,\\x_1+\frac{1}{2}x_2-2x_3=1,\end{cases}$$

解其对应的齐次方程组,得通解

$$\boldsymbol{\xi}=k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\text{其中}k\text{为任意常数},$$

显然,非齐次线性方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

于是所求方程的解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$,即

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\text{其中}k\text{为任意常数}.$$

注　注意区分：$A=\alpha\beta^T$ 是 3 阶方阵，$B=\beta^T\alpha$ 是一个数.

6 [2004]　设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解　对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ -2a & a & 0 & 0\\ -3a & 0 & a & 0\\ -4a & 0 & 0 & a\end{pmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<4$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,0)^T,\eta_2=(-1,0,1,0)^T,\eta_3=(-1,0,0,1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3,\text{其中 } k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数；}$$

当 $a\neq0$ 时，

$$B\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+10 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

可知 $a=-10$ 时，$r(A)=3<4$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ -4x_1+x_4=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\eta=(1,2,3,4)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x=k\eta,\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

注　由于本题是含 n 个方程 n 个未知数的方程组，因此也可以考虑用行列式分析.

7 [2005]　已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数），且 $AB=O$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

解　因为矩阵 A 的第一行元素 a,b,c 不全为零，所以 A 的秩 $r(A)\geqslant1$；又因为 $AB=O$，所以

$$r(A)+r(B)\leqslant3,$$

且矩阵 B 的列向量 $\eta_1=(1,2,3)^T$ 与 $\eta_2=(3,6,k)^T$ 都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解. 因而：

当 $k\neq9$ 时，η_1 与 η_2 线性无关，即 $r(B)=2$，从而 $r(A)=1$. 此时 $Ax=0$ 的通解为

$$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2,\text{其中 } c_1,c_2 \text{ 为任意常数；}$$

当 $k=9$ 时，$r(B)=1$，矩阵 A 的秩有两种可能：$r(A)=1$ 或 $r(A)=2$. 以下分别进行讨论.

如果 $r(A)=2$，方程组 $Ax=0$ 的基础解系只包含一个线性无关的解向量，即为 $\eta_1=(1,2,3)^T$，所以通

解为

$$x=c_3\boldsymbol{\eta}_1,\text{其中 } c_3 \text{ 为任意常数.}$$

如果 $r(\boldsymbol{A})=1$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系应包含两个线性无关的解向量.此时方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 同解.因为 a,b,c 不全为零,不妨设 $a\neq 0$,得两个线性无关的解向量:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-b,a,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-c,0,a)^{\mathrm{T}},$$

于是,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$x=c_4\boldsymbol{\xi}_1+c_5\boldsymbol{\xi}_2,\text{其中 } c_4,c_5 \text{ 为任意常数.}$$

总之,齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为(以下 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 均为任意常数):

当 $k\neq 9$ 时,$\boldsymbol{x}=c_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}+c_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}$;

当 $k=9$ 时,若 $r(\boldsymbol{A})=2$,通解为 $\boldsymbol{x}=c_3(1,2,3)^{\mathrm{T}}$;

若 $r(\boldsymbol{A})=1$,通解为 $\boldsymbol{x}=c_4(-b,a,0)^{\mathrm{T}}+c_5(-c,0,a)^{\mathrm{T}}(a\neq 0)$.

8 [2006] 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解.

(Ⅰ)证 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是题设所给非齐次线性方程组的三个线性无关的解向量,则 $\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$ 是其对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解向量.若令 t 表示方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所包含向量的个数,则 $t\geqslant 2$.又由 $r(\boldsymbol{A})+t=4$ 得

$$4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2,\text{即 } r(\boldsymbol{A})\leqslant 2.$$

不难看到,在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$(或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行(列)线性无关),所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,从而 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ)解 对非齐次线性方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&4a+b-5&4-2a\end{array}\right)=\boldsymbol{B}.$$

由(Ⅰ)知,$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2$,故有

$$4-2a=0 \text{ 和 } 4a+b-5=0,$$

从而得 $a=2,b=-3$.

此时有

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

可得方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

9 [2009] 设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 ξ_2,ξ_3,证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(Ⅰ)解 对增广矩阵$(A\mid\xi_1)$作初等行变换:

$$(A\mid\xi_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

故得基础解系为$(1,-1,2)^{\mathrm T}$,一个特解为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm T}$,从而

$$\xi_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm T}+C_1(1,-1,2)^{\mathrm T}\text{ 或 }\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+C_1\\\frac{1}{2}-C_1\\2C_1\end{pmatrix},$$

其中 C_1 为任意常数.

其次,

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix},$$

对增广矩阵$(A^2\mid\xi_1)$作初等行变换:

$$(A^2\mid\xi_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

故得基础解系为$(-1,1,0)^{\mathrm T},(0,0,1)^{\mathrm T}$,一个特解为$\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm T}$.从而

$$\xi_3=C_2(-1,1,0)^{\mathrm T}+C_3(0,0,1)^{\mathrm T}+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm T}\text{ 或 }\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-C_2\\C_2\\C_3\end{pmatrix},$$

其中 C_2,C_3 为任意常数.

(Ⅱ)证 只需证明行列式$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|\neq0$即可.事实上,

$$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}-1&-\frac{1}{2}+C_1&-\frac{1}{2}-C_2\\1&\frac{1}{2}-C_1&C_2\\-2&2C_1&C_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}-C_2\\1&\frac{1}{2}&C_2\\-2&0&C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&C_2\\-2&0&C_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq0,$$

故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

10 [2010] 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

(Ⅰ)求 λ,a；

(Ⅱ)求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解 (Ⅰ)因为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解，即解不是唯一的，所以系数行列式

$$|A|=0=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

得解 $\lambda=-1$ 或 1(二重).

当 $\lambda=1$ 时，对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a-1\end{array}\right),$$

其秩为 2，系数矩阵 A 的秩为 1，方程组 $Ax=b$ 无解，故 $\lambda=1$ 应舍去；

当 $\lambda=-1$ 时，对方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵作初等行变换：

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)=B.$$

因为方程组 $Ax=b$ 有解，所以 $a+2=0$，即 $a=-2$. 总之，$\lambda=-1,a=-2$.

(Ⅱ)当 $\lambda=-1,a=-2$ 时，继续对(Ⅰ)中的矩阵 B 作初等行变换得

$$B\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

11 [2012] 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|A|$；

(Ⅱ)当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

(Ⅰ)解 $$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}0&a&0\\0&1&a\\a&0&1\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(Ⅱ)**解法 1** 因为方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解的必要条件是其系数矩阵 A 的行列式为 0，即 $|A|=0$，由(Ⅰ)得 $1-a^4=0$，从而 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时,对方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵作初等行变换:

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&0&0&\vdots&1\\0&1&1&0&\vdots&-1\\0&0&1&1&\vdots&0\\1&0&0&1&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&\vdots&1\\0&1&1&0&\vdots&-1\\0&0&1&1&\vdots&0\\0&-1&0&1&\vdots&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&\vdots&1\\0&1&1&0&\vdots&-1\\0&0&1&1&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&-2\end{pmatrix},$$

由此知系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=3$,增广矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=4$,二者不相等,故当 $a=1$ 时,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解;

当 $a=-1$ 时,

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&-1\\0&0&1&-1&\vdots&0\\-1&0&0&1&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&-1\\0&0&1&-1&\vdots&0\\0&-1&0&1&\vdots&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&-1\\0&0&1&-1&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

由此知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=3<4$,故当 $a=-1$ 时,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

只需解方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=1,\\x_2-x_3=-1,\\x_3-x_4=0,\end{cases}$$

其对应的齐次方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\x_2-x_3=0,\\x_3-x_4=0,\end{cases}\text{即 } x_1=x_2=x_3=x_4,$$

故基础解系为 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 不难求得非齐次方程组的一个特解为 $(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$,从而得通解

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

解法 2 直接对含参数 a 的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换:

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&a&0&0&\vdots&1\\0&1&a&0&\vdots&-1\\0&0&1&a&\vdots&0\\a&0&0&1&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&\vdots&1\\0&1&a&0&\vdots&-1\\0&0&1&a&\vdots&0\\0&-a^2&0&1&\vdots&-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&\vdots&1\\0&1&a&0&\vdots&-1\\0&0&1&a&\vdots&0\\0&0&a^3&1&\vdots&-a-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&\vdots&1\\0&1&a&0&\vdots&-1\\0&0&1&a&\vdots&0\\0&0&0&1-a^4&\vdots&-a-a^2\end{pmatrix}.$$

由于当且仅当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})<4$ 时,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,故有 $1-a^4=0$ 且 $-a-a^2=0$,得 $a=-1$,即 $a=-1$ 时,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

以下同解法 1.

12 [2013] 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C.

解 设矩阵 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，代入 $AC-CA=B$，得方程组

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\ -ax_1+x_2+ax_4=1,\\ x_1-x_3-x_4=1,\\ x_2-ax_3=b.\end{cases} \qquad (*)$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right).$$

由此可知：当 $a\neq-1$ 或 $b\neq0$ 时，方程组$(*)$无解；当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时，方程组$(*)$有解，此时方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3-x_4=1,\\ x_2+x_3=0,\end{cases}$$

求得其通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

综上，当且仅当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时，存在满足条件的矩阵 C，且

$$C=\begin{pmatrix}1+k_1+k_2 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

13 [2014] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(Ⅱ)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

解 (Ⅰ)对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix},$$

则方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)对矩阵$(A \vdots E)$作初等行变换：

$$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{array}\right).$$

记 $E=(e_1,e_2,e_3)$，则

$Ax=e_1$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_1\alpha$，其中 k_1 为任意常数；

$Ax=e_2$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}+k_2\alpha$，其中 k_2 为任意常数；

$Ax=e_3$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\alpha$，其中 k_3 为任意常数.

于是，所求矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}2 & 6 & -1\\ -1 & -3 & 1\\ -1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+(k_1\alpha,k_2\alpha,k_3\alpha)\text{，其中 }k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数.}$$

14 [2016] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

解 （Ⅰ）对矩阵 $(A \vdots \beta)$ 作初等行变换：

$$(A \vdots \beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 1 & 0 & a & 1\\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 0 & -1 & 2a-1 & 1\\ 0 & 0 & -a^2+2a & a-2\end{array}\right),$$

由方程组 $Ax=\beta$ 无解知，$r(A \vdots \beta)>r(A)$，即 $-a^2+2a=0$ 且 $a-2\neq0$，解得 $a=0$.

（Ⅱ）对矩阵 $(A^TA \vdots A^T\beta)$ 作初等行变换：

$$(A^TA \vdots A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 2 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

所以，方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

4.3 解抽象方程组

考点点睛

这部分解抽象方程组要比"4.2 解具体方程组"复杂一些，但仍是首先定出系数矩阵的秩 $r(A)$，其次充分利用解的结构与性质，利用观察法找到需要的特解与通解.

15 [2002] 已知4阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为4维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解法1 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则由

$$\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta},$$

得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

并将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，整理后得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，故有

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0,\\-x_1+x_3=0,\\x_4-1=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}2x_1+x_2=3,\\-x_1+x_3=0,\\x_4=1,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x_2=3-2x_1,\\x_3=x_1,\\x_4=1,\end{cases}\qquad x_1\ 为任意常数,$$

或以向量形式表示为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},其中\ k\ 为任意常数.$$

解法2 由于 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有1个解向量，而 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以 $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，而 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，所以 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数.

16 [2017] 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有3个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A})=2$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(Ⅰ)证 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有 2 个不为零的特征值，从而 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ)解 由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，故 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.

又 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解. 故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

4.4 基础解系

考点点睛

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$\Leftrightarrow$ (1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(3) $n-r(\boldsymbol{A})=s$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一个解都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

17 [2001] 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$，讨论实数 t 满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

解 设有常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3+k_4\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{0},$$

即

$$(k_1+tk_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+tk_1)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3+tk_2)\boldsymbol{\alpha}_3+(k_4+tk_3)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，从而线性无关，故必有

$$\begin{cases}k_1+tk_4=0,\\k_2+tk_1=0,\\k_3+tk_2=0,\\k_4+tk_3=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

当且仅当

$$\begin{vmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{vmatrix}=1-t^4\neq 0\text{ 时},$$

即 $t\neq\pm1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 都是基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，从而它们也都是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，并且正好是 4 个向量，所以当 $t\neq\pm1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

18 [2011] 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

答 应选(D).

解 因齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含 1 个向量 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=4-1=3$. $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}^*)$ 是由 $r(\boldsymbol{A})$ 确定的，它们之间的关系为

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}4(\text{或 } n), & \text{当 } r(\boldsymbol{A})=4(\text{或 } n),\\ 1, & \text{当 } r(\boldsymbol{A})=3(\text{或 } n-1),\\ 0, & \text{当 } r(\boldsymbol{A})<3(\text{或 } n-1),\end{cases}$$

于是 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，从而方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $4-r(\boldsymbol{A}^*)=4-1=3$ 个解向量. 由此，选项(A)，(B)被排除.

又因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及 $|\boldsymbol{A}|=0$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 由前面可知 $r(\boldsymbol{A})=3$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩也为 3，则其中 3 个线性无关的向量即为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

最后，因向量 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，故

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_3$. 由此可知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$(或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$)线性无关，是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，选项(D)是正确的.

也可利用排除法求解. 求出 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，排除选项(A)，(B)；由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，排除选项(C)，只能选(D).

4.5 公共解与同解问题

考点点睛

1. 公共解

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零公共解.

2. 同解

若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有完全相同的解(或有完全相同的基础解系)，则称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组.

于是，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组

$\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均满足 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解也均满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$(或 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$)，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

19 [1994－Ⅰ] 设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0.\end{cases}$又已知某齐次线性方程组(Ⅱ)的通解为$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1)求线性方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2)问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解.若没有,则说明理由.

解 (1)由方程组(Ⅰ)可得$\begin{cases}x_1=-x_2,\\x_4=x_2.\end{cases}$分别取$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,得(Ⅰ)的基础解系$(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2)有非零公共解.

(Ⅱ)的通解可表示为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)^{\mathrm{T}},$$

把它代入(Ⅰ),得

$$\begin{cases}-k_2+(k_1+2k_2)=0,\\(k_1+2k_2)-k_2=0,\end{cases}$$

解得$k_1=-k_2$.

当$k_1=-k_2\neq0$时,(Ⅱ)的通解化为

$$\begin{aligned}k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}&=k_2[(0,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}]\\&=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

此向量即是(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解,故方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的所有非零公共解是$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$(k是不为零的任意常数).

注 令$\boldsymbol{\xi}=l_1(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+l_2(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}=k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.只要能求出不全为零的$l_1,l_2$或者$k_1,k_2$,则便有$\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$且$\boldsymbol{\xi}$既是(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.于是可转化为以$(l_1,l_2,k_1,k_2)$为未知数的方程组,求出$l_1,l_2$或者$k_1,k_2$便可(留给读者自练).

20 [2005 数学三] 已知齐次线性方程组

$$\text{(i)}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\text{和(ii)}\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解,求a,b,c的值.

解 方程(ii)的未知量个数大于方程的个数,故方程组(ii)有无穷多解.因为方程组(i)与(ii)同解,所以方程组(i)的系数矩阵的秩小于3.

对方程组(i)的系数矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

从而$a=2$.

此时,方程组(i)的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故$(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$是方程组(i)的一个基础解系.

将$x_1=-1,x_2=-1,x_3=1$代入方程组(ii)可得$b=1,c=2$或$b=0,c=1$.

当$b=1,c=2$时,对方程组(ii)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

故方程组(i)与(ii)同解;

当 $b=0,c=1$ 时,方程组(ii)的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故方程组(i)与(ii)的解不完全相同.

综上所述,当 $a=2,b=1,c=2$ 时,方程组(i)与(ii)同解.

21 [2007] 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\qquad ①$$

与方程组

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\qquad ②$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

解 将方程组①与②联立,得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3=a-1,\end{cases}\qquad ③$$

则方程组③的解即为方程组①与②的公共解.

对方程组③的增广矩阵作初等行变换:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1-a\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right)=B.$$

显然,当 $(a-1)(a-2)=0$,即 $a=1$ 或 $a=2$ 时,方程组③的增广矩阵的秩等于其系数矩阵的秩,故有解.又可分两种情况:

当 $a=1$ 时,

$$B=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

此时方程组③的所有解即方程组①与方程组②的所有公共解为 $\boldsymbol{x}=k(-1,0,1)^{\mathrm T}$,其中 k 为任意常数;

当 $a=2$ 时,

$$B=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

此时方程组③有唯一解 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm T}$,这也是方程组①与方程组②的唯一公共解.

第5章　矩阵的特征值和特征向量

考点分布

考点 \ 分值 \ 年份	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（02—17年）
特征值与特征向量	3			4	4	7	11						6	4		4	43
矩阵的相似对角化							3	4					5		15	8	35
一般方阵的对角化		10	9											11			30
实对称阵的对角化					5	4			15	11		4					39

2002—2017年

注：1987—2001年未考矩阵的特征值和特征向量

5.1　求特征值与特征向量

考点点睛

1. 求特征值与特征向量的基本方法

(1)对于具体数字型矩阵往往是通过特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 求特征值 λ，通过解对应齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$ 求对应于特征值 λ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

(2)对于抽象型矩阵往往是通过 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq 0)$ 的定义法求特征值 λ 和对应于特征值 λ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

2. 与 A 有关的矩阵的特征值及特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$A^{-1}+f(A)$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\dfrac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda}+f(\lambda)$
对应的特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ

3. 特征值与特征向量的性质

若 A 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的特征值，则

(1)$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

(2)$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(3)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应于特征值 λ_i 的两个不同的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$k_1,k_2$ 为非零常数）仍是对应于 λ_i 的特征向量.

(4)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是对应于不同特征值 λ_i 与 λ_j 的两个特征向量,则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$($k_1,k_2$ 为非零常数)不再是特征向量.

(5)不同特征值对应的特征向量线性无关.

1 [2002] 矩阵 $\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的非零特征值是________.

答 应填 4.

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix},$$

则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\-2&\lambda-2&2\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\0&\lambda&\lambda\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&1&1\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4),$$

由此可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0(二重),4.

2 [2009] 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

答 应填 2.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}(y_1,y_2,y_3)=\begin{pmatrix}x_1y_1&x_1y_2&x_1y_3\\x_2y_1&x_2y_2&x_2y_3\\x_3y_1&x_3y_2&x_3y_3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

所求 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 即为矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 中主对角线元素之和,即矩阵的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$.而 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$ 等于矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值之和,也等于其相似矩阵特征值之和,故 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$.

3 [2017] 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,则 $a=$________.

答 应填 −1.

解 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,于是 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 线性相关.

又

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix},$$

则 $3+2a=1,a=-1$.

5.2 矩阵的相似对角化

1. 相似对角化理论

(1)n 阶矩阵 $A\sim\Lambda\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

(2)n 阶矩阵 $A\sim\Lambda\Leftrightarrow A$ 的 i 重特征值 λ_i 有 i 个线性无关的特征向量,即 $n-r(\lambda_i E-A)=i$.

(3)n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A\sim\Lambda$.

(4)A 是实对称矩阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$.

(5)A 是 n 阶矩阵,$r(A)=1$,则 $A\sim\Lambda\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\neq 0$.

2. 相似对角化时的可逆矩阵 P

若 A 可相似对角化,则存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$,这里的 P 就是 A 的特征向量拼成的可逆矩阵,注意在求 P 时特征向量的顺序要与对角阵中特征值的顺序保持一致,且 P 不唯一.

例 [2003] 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ,试确定常数 a 的值;并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]$$
$$=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

由于 A 相似于对角矩阵 Λ,故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 有两个线性无关的特征向量,因此矩阵 $6E-A$ 的秩应为 1. 从而由

$$6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $a=0$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-2$ 时,

$$2E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解方程组$\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\x_3=0\end{cases}$得对应于$\lambda_3=-2$的特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&-2\end{pmatrix}$,则$P$可逆,并有$P^{-1}AP=\Lambda$.

5 [2004] 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根,求$a$的值,并讨论$A$是否可相似对角化.

解 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&2-\lambda&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-3&3\\-1&-a-1&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若$\lambda=2$是特征方程的二重根,则有$2^2-16+18+3a=0$,解得$a=-2$.

当$a=-2$时,A的特征值为2,2,6,矩阵

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}$$

的秩为1,故$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量有两个,从而A可相似对角化.

若$\lambda=2$不是特征方程的二重根,则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$为完全平方,从而$18+3a=16$,解得$a=-\frac{2}{3}$.

当$a=-\frac{2}{3}$时,A的特征值为2,4,4,矩阵

$$4E-A=\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}$$

的秩为2,故$\lambda=4$对应的线性无关的特征向量只有一个,从而A不可相似对角化.

6 [2010] 设A为4阶实对称矩阵,且$A^2+A=O$.若A的秩为3,则A相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

答 应选(D).

解 因 $\boldsymbol{A}$ 是秩为3的实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 必相似于秩为3的对角矩阵. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\lambda^2+\lambda=0$,即 $\lambda=0$ 或 -1. 由此可知只有选项(D)是正确的.

注 题目中"实对称"这个条件是可以删掉的,不影响结果,但是这样题目难度就加大了,因为此时判断 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$ 就不那么容易了. 读者可以通过利用"$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,因此 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$"这一思路去完成.

7 [2012] 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

答 应选(B).

解法1 由题设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可相似对角化的矩阵,因而其相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$ 的特征向量. 由于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的2重特征值,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值1的特征向量,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$,从而有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

应选(B).

解法2 因为矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是对矩阵 $\boldsymbol{P}$ 作一次初等列变换——将 $\boldsymbol{P}$ 的第2列加到第1列上而得到的,所以有

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

即选项(B)是正确的.

8 [2013] 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0,b=2$. (B) $a=0,b$ 为任意常数.

(C) $a=2,b=0$. (D) $a=2,b$ 为任意常数.

答 应选(B).

解 题中所给矩阵分别记为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2],$$

所以,当 $a=0$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$,且 b 可为任意常数,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,充分性成立.

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似,则 2 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,所以有

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=2[(2-2)(2-b)-2a^2]=0,a=0,$$

必要性成立.因此选(B).

9 [2014] 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

证 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$.因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=n,\lambda_2=0(n-1$ 重).

由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

因为 $r(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$,所以 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 $\lambda_2=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,于是 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$.

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

注 (1)由于在考试大纲的范围内仅有矩阵相似于对角矩阵的判定,而没有判定任意两个矩阵相似的一般性结论,因此,部分考生没有意识到本题应该通过对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是否都相似于同一个对角矩阵的判定来解题.这也就成为本题在考试中考生所呈现的最主要错误.

(2)推演过程反映出部分考生对于矩阵的三种关系无法区分,尤其是对矩阵的相似关系与合同关系,等价关系的区分.有考生通过说明 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=1$ 来说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相似的,更有不少考生利用合同关系来处理本题,即试图寻找可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 建立如下关系式:$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

10 [2015] 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (Ⅰ)由于矩阵 A 与矩阵 B 相似,所以

$$\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,B,|A|=|B|,$$

于是
$$3+a=2+b,2a-3=b,$$

解得
$$a=4,b=5.$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

由于矩阵 A 与矩阵 B 相似,所以

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2(\lambda-5),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解方程组 $(E-A)x=0$,得线性无关的特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$,$\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_3=5$ 时,解方程组 $(5E-A)x=0$,得特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

故 P 为所求可逆矩阵.

11 [2016] 设 A,B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是

(A)A^T 与 B^T 相似.　　(B)A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

(C)$A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似.　　(D)$A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似.

答 应选(C).

解 依题意可知,存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$.

则
$$B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}=P_1^{-1}A^TP_1,$$

其中 $P_1=(P^T)^{-1}$ 可逆. 故 $A^T\sim B^T$,

$$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}A^{-1}P.\text{故 }A^{-1}\sim B^{-1},$$

且
$$P^{-1}(A+A^{-1})P=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=B+B^{-1},\text{故 }A+A^{-1}\sim B+B^{-1}.$$

故选(C).

12 [2017] 设 A 为 3 阶矩阵,$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为可逆矩阵,使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则 $A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$

(A)$\alpha_1+\alpha_2$.　　(B)$\alpha_2+2\alpha_3$.　　(C)$\alpha_2+\alpha_3$.　　(D)$\alpha_1+2\alpha_2$.

答 应选(B).

解 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,说明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是 A 的特征向量,特征值依次为 0,1,2. 于是

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=A\boldsymbol{\alpha}_1+A\boldsymbol{\alpha}_2+A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

故选(B).

13 [2017] 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则

(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似.
(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似.
(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

答 应选(B).

解 A 和 B 都是上三角矩阵,特征值是对角线上的元素,都是 1,2,2. 它们是否与 C 相似只用看是否可相似对角化.

对二重特征值 2, $n-r(A-2E)=3-1=2$(等于重数),于是 A 可相似对角化, A 相似于 C.

对二重特征值 2, $n-r(B-2E)=3-2=1$(小于重数),于是 B 不可相似对角化, B 不相似于 C.

故选(B).

5.3 相似的应用

14 [1992—Ⅰ] 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, 对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$, 又向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

(1)将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表出;

(2)求 $A^n\boldsymbol{\beta}$(n 为自然数).

解 (1)设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

对此方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{array}\right),$$

得唯一解 $(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 故有

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3.$$

(2)由于 $A\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$, 故 $A^n\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i^n\boldsymbol{\xi}_i$, $i=1,2,3$. 因此

$$\begin{aligned}A^n\boldsymbol{\beta}&=A^n(2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=2(A^n\boldsymbol{\xi}_1)-2(A^n\boldsymbol{\xi}_2)+A^n\boldsymbol{\xi}_3\\&=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 求 $A^n\boldsymbol{\beta}$ 一般是如本题这样先处理 $\boldsymbol{\beta}$(用 A 的特征向量线性表示出来),再利用 $A^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}$. 如果先用相似求出 A^n, 然后再去计算乘积 $A^n\boldsymbol{\beta}$, 这样计算量比较大.

15 [2000 数学一] 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练

工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n,记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式:$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(Ⅱ)验证 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值;

(Ⅲ)当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\[4pt]\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时,求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

解　(Ⅰ)$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right),\\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\end{cases}$ 化简得 $\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n,\\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n,\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\[4pt]\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

于是 $A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\[4pt]\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)令 $P=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}$,则由 $|P|=5\neq0$ 知,$\boldsymbol{\eta}_1$,$\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关.

因 $A\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\eta}_1$,故 $\boldsymbol{\eta}_1$ 为 A 的特征向量,且相应的特征值 $\lambda_1=1$.

因 $A\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\[4pt]\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$,故 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为 A 的特征向量,且相应的特征值 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

(Ⅲ)
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}&=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\\&=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\[4pt]\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$,有 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$.于是

$$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}^nP^{-1}.$$

又

$$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1\\-1&4\end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned}A^n&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&4\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n&4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n\\1-\left(\frac{1}{2}\right)^n&1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此
$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.$$

注　容易求得$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\boldsymbol{\eta}_1+\frac{3}{10}\boldsymbol{\eta}_2$,于是
$$A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=A^n\left(\frac{1}{5}\boldsymbol{\eta}_1+\frac{3}{10}\boldsymbol{\eta}_2\right)=\frac{1}{5}A^n\boldsymbol{\eta}_1+\frac{3}{10}A^n\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{5}\lambda_1^n\boldsymbol{\eta}_1+\frac{3}{10}\lambda_2^n\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.$$

16 [2016]　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求$\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设3阶矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$满足$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记$\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$分别表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合.

解　(Ⅰ)因为
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$
所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

当$\lambda_1=-1$时,解方程组$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$;

当$\lambda_2=-2$时,解方程组$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量$\boldsymbol{\xi}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$;

当$\lambda_3=0$时,解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,得特征向量$\boldsymbol{\xi}_3=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

所以
$$\boldsymbol{A}^{99}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ)因为$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$,所以
$$\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^{99}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{97}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{A}^2=\cdots=\boldsymbol{BA}^{99},$$
即
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以
$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$$

5.4　实对称矩阵的特征值与特征向量

1. 实对称矩阵特征值、特征向量的性质

(1)实对称矩阵的特征值全是实数.

(2)实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交.

2. 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵必可相似对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$;且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$. 这里有些题目可能会涉及施密特正交化.

17 [2006]　设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解　(Ⅰ)由于 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,所以有
$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$
这表明 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的一个特征向量. 又因 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$,可写成 $\boldsymbol{A\alpha}_1=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$,故 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应于 0 的两个线性无关的特征向量,即 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.

综上,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3;对应于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$($k_1$,$k_2$ 为不全为零的任意常数),对应于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$(k_3 为非零的任意常数).

(Ⅱ)为求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,将 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化:

令
$$\xi_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$\xi_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\xi_1=\frac{1}{2}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$
再分别将 ξ_1,ξ_2,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得
$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$
以 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$ 为列向量组即可构成正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,以对应的特征值 0,0,3 构成对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,即

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix},$$

满足 $Q^{T}AQ=\boldsymbol{\Lambda}$.

18 [2007] 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $B=A^5-4A^3+E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 B.

解 (Ⅰ)由 $A\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$,知

$$\begin{aligned}B\boldsymbol{\alpha}_1&=(A^5-4A^3+E)\boldsymbol{\alpha}_1\\&=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\boldsymbol{\alpha}_1\\&=-2\boldsymbol{\alpha}_1,\end{aligned}$$

因而向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 B 的属于特征值 -2 的一个特征向量.

因为 A 的所有特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,故 $B=A^5-4A^3+E$ 的所有特征值分别为 $\lambda_i^5-4\lambda_i^3+1(i=1,2,3)$,代入数值后知 B 的特征值为 $-2,1,1$.

由前面的讨论知 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 B 的属于特征值 -2 的一个特征向量,故 B 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$,其中 k_1 为任意非零常数.

又因矩阵 A 是实对称矩阵,故 B 也是实对称矩阵. 从而属于 B 的不同特征值的特征向量相互正交. 设 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 B 的属于特征值 1 的特征向量,则 $(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{\alpha}_1=0$,即

$$x_1-x_2+x_3=0.$$

解此方程组得其基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^T$,故矩阵 B 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k_2,k_3 为不全为零的任意常数.

(Ⅱ)将 B 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化、单位化后构成一正交矩阵 Q.

令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\eta}_3\|}\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},$$

则

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

于是

$$B=Q\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}Q^{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

注 (1)在第一问求 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 时，可以直接取成二者正交，这样就能回避下面的施密特正交化步骤. 由 $x_1-x_2+x_3=0$，取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T$，此时再设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，且令 $\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_3=0$，得 $x_1+x_2=0$，联立 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_1+x_2=0\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,2)^T$.

(2)第二问也可以直接利用相似对角化求 $\boldsymbol{B}$.

19 [2010] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt6}(1,2,1)^T$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.

解 由于 $\frac{1}{\sqrt6}(1,2,1)^T$ 是正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列，所以 $(1,2,1)^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量. 设其对应的特征值为 λ_1，于是有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}-2+4=\lambda_1,\\5+a=2\lambda_1,\\4+2a=\lambda_1,\end{cases}$$

解得 $a=-1,\lambda_1=2$. 由此可知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}.$$

其特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

当 $\lambda_2=5$ 时，解齐次方程组

$$\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

得到属于 λ_2 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,1)^T$；

当 $\lambda_3=-4$ 时，解齐次方程组

$$\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

得到属于 λ_3 的一个特征向量 $\xi_3=(-1,0,1)^T$；

将 ξ_2,ξ_3 单位化后分别作为 Q 的第 2,3 列，可得

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

并有

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{pmatrix}.$$

所以 Q 为所求矩阵.

20 [2011] 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 A 的所有特征值与特征向量；(Ⅱ)求矩阵 A.

解 (Ⅰ)由于 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，所以 0 是 A 的一个特征值.

由 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 可得

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以 -1 是 A 的一个特征值，其对应的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$(其中 k_1 为任意非零常数)；1 也是 A 的一个特征值，其对应的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$(其中 k_2 为任意非零常数).

设 A 的对应于特征值 0 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，由实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的，有

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,(1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}\text{解之得}\begin{cases}x_1=0,\\x_2=k_3,\\x_3=0,\end{cases}$$

于是对应于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$(其中 k_3 为任意非零常数).

（Ⅱ）令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned}A&=Q\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q^{T}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注　也可令 $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}A&=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

第6章　二次型

考点分布

年份 分值 考点	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	合计（07—17年）
二次型的矩阵表示、秩、标准形与规范形、惯性定理			11		4			4		4		23
合同矩阵的概念与性质	4	4										8
用正交交换化二次型为标准形及其几何应用						11	11		4		11	37
用配方法化二次型为标准形												
正定性的概念、判定及其应用												

2007—2017年

注：1987—2006年未考二次型

6.1　二次型的概念及化二次型为标准形

考点点睛

用正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为标准形的步骤：

(1)求 A 中的参数.

(2)由 $|\lambda E-A|=0$ 求 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，再由 $(\lambda E-A)x=0$ 求 A 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，并检查是否正交，若不正交转到(3)正交化处理，若正交，则转到(4)单位化处理.

(3)对不正交的向量组进行正交化处理，记为 β_1,β_2,β_3.

(4)对正交的向量组进行单位化处理，记为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$.

(5)令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 $x^{\mathrm{T}}Ax\xlongequal{x=Qy}\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$.

注意：正交矩阵 Q 中的特征向量要与标准形中系数(特征值)相对应.

1 [2009]　设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

解　(Ⅰ)二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix},$$

其特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-(a-1) \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-a)[\lambda-(a+1)][\lambda-(a-2)],$$

所以 A 的特征值为

$$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2.$$

(Ⅱ)由 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$ 知，其矩阵 A 的特征值有两个为正数，一个为零. 又

$$a-2<a<a+1,$$

所以 $a-2=0$，即 $a=2$.

2 [2011]　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________.

答　应填 2.

解法 1　求二次型矩阵 A 的特征值.

因为
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

即 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$，原二次型的标准形为 $f=y_2^2+4y_3^2$，其正惯性指数 $p=2$.

解法 2　配方法.

$$f=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+3x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$
$$=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2,$$

因此原二次型的正惯性指数 $p=2$.

3 [2012]　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值；

(Ⅱ)求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

(Ⅰ)**解法 1**　因为 $2=r(A^TA)=r(A)$，故可对 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $a=-1$.

解法 2
$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{pmatrix}.$$

由已知 $r(A^{\mathrm{T}}A)=2$,且 $A^{\mathrm{T}}A$ 有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}2&0\\0&1+a^2\end{vmatrix}\neq0$,故
$$|A^{\mathrm{T}}A|=\begin{vmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{vmatrix}=(a+1)^2(3+a^2)=0,$$
从而得 $a=-1$.

(Ⅱ)解　由(Ⅰ)$a=-1$,得
$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix},$$
故矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征多项式为
$$|\lambda E-A^{\mathrm{T}}A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$
则 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=2$ 时,解方程组
$$\begin{cases}-2x_3=0,\\-2x_3=0,\\-2x_1-2x_2-2x_3=0,\end{cases}$$
得相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,单位化后为
$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_2=6$ 时,解方程组
$$\begin{cases}4x_1-2x_3=0,\\4x_2-2x_3=0,\\-2x_1-2x_2+2x_3=0,\end{cases}$$
得相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,单位化后为
$$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_3=0$ 时,解方程组
$$\begin{cases}-2x_1-2x_3=0,\\-2x_2-2x_3=0,\\-2x_1-2x_2-4x_3=0,\end{cases}$$

得相应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$,单位化后为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

于是得到正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下,二次型的标准形为

$$f=2y_1^2+6y_2^2.$$

4 [2013] 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(Ⅰ)**证法 1** 记列向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 由于

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

类似地,$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$ 也有对应的表达式.所以

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\&=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

又$(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,即 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵,所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

证法 2 将二次型 f 展开并写成矩阵相乘的形式得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3\\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3\\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)=\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

即二次型 f 所对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ)**证法 1** 记矩阵 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是相互正交的单位向量,即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1,\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,所以

$$\boldsymbol{A\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$
$$\boldsymbol{A\beta}=(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

即 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$$r(\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})=2,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩矩阵,所以 $\lambda_3=0$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.故二次型 f 在正交变换下的标准形为

$$f=2y_1^2+y_2^2.$$

证法 2 同证法 1:$\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值.$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 分别是其对应的单位特征向量.

取单位向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得其与向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都正交,即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=0,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=0$(如何取得 $\boldsymbol{\gamma}$,请读者思考).

令矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$,则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵.在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$(其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$)下,二次型

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Qy} \\ &=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{y} \\ &=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0})\boldsymbol{y} \\ &=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=2y_1^2+y_2^2, \end{aligned}$$

即 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

5 **[2014]** 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是________.

答 应填$[-2,2]$.

解法 1 由于

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3 \\ &=x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2-x_2^2+4x_2x_3-(2x_3)^2+4x_3^2-a^2x_3^2 \\ &=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2. \end{aligned}$$

因为 f 的负惯性指数为 1,所以 $4-a^2\geqslant 0$,故 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

解法 2 二次型 f 的负惯性指数为 1,则 $\lambda_1<0,\lambda_2\geqslant 0,\lambda_3\geqslant 0$,于是

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=a^2-4\leqslant 0,$$

故 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

6 **[2015]** 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,$

e_3). 若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. (B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$. (C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. (D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

答 应选(A).

解法 1 设二次型矩阵为 A，则

$$P^{-1}AP=P^{T}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

可见 e_1,e_2,e_3 都是 A 的特征向量，特征值依次为 $2,1,-1$，于是 $-e_3$ 也是 A 特征向量，特征值是 -1. 因此

$$Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

从而在正交变换 $x=Qy$ 下的标准二次型为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

解法 2
$$f=x^{T}Ax\xlongequal{x=Py}y^{T}P^{T}APy=y^{T}\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}y.$$

$$Q=(e_1,-e_3,e_2)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}PC,$$

则

$$\begin{aligned}f&=x^{T}Ax\xlongequal{x=Qy}y^{T}Q^{T}AQy\\&=y^{T}C^{T}P^{T}APCy\\&=y^{T}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}y\\&=y^{T}\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2.\end{aligned}$$

故选(A).

7 [2016] 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为1,2,则

(A)$a>1$. (B)$a<-2$. (C)$-2<a<1$. (D)$a=1$ 或 $a=-2$.

答 应选(C).

解 二次型矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix},$$

由特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2,$$

得矩阵 A 的特征值：$a+2,a-1,a-1$.

由于正、负惯性指数分别为 1,2，可知$\begin{cases}a+2>0,\\a-1<0,\end{cases}$所以$-2<a<1$.

8 [2017] 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

解 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}.$$

由题设知 $|A|=0$. 又

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&-6\\1&-1&1\\0&-3&a+4\end{vmatrix}=6-3a,$$

于是 $a=2$.

由于矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\lambda^2-\lambda-3&6-\lambda\\-1&\lambda+1&-1\\0&4\lambda+3&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6),$$

所以特征值为 $-3,6,0$.

不妨设 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

则矩阵 A 属于特征值 $\lambda_1=-3$ 的单位特征向量为 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$;

属于特征值 $\lambda_2=6$ 的单位特征向量为 $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$;

属于特征值 $\lambda_3=0$ 的单位特征向量为 $\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

故所求的一个正交矩阵为 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

6.2 正定问题

考点点睛

n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$. 若对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$,均有 $x^TAx>0$,则称 f 为正定二次型,称二次型对应的矩阵 A 为正定矩阵.

1. 二次型正定的充要条件

n 元二次型 $f=x^TAx$ 正定 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $x\neq 0$,有 $x^TAx>0$(定义)$\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p=n\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 D,使 $A=D^TD\Leftrightarrow A\simeq E\Leftrightarrow A$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A$ 的全部顺序主子式大于零.

2. 二次型正定的必要条件

(1)$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$. (2)$|A|>0$.

9 [1999 数学一] 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定,B 为 $m\times n$ 实矩阵,B^T 为 B 的转置矩阵,试证:B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

证 必要性. 设 B^TAB 为正定矩阵,则对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$,有 $x^T(B^TAB)x>0$,即

$(Bx)^TA(Bx)>0$，于是，$Bx\neq 0$. 因此 $Bx=0$ 只有零解. 从而 $r(B)=n$.

充分性. 因 $(B^TAB)^T=B^TA^TB=B^TAB$，故 B^TAB 为实对称矩阵. 若 $r(B)=n$，则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解. 从而对任意实 n 维列向量 $x\neq 0$ 有 $Bx\neq 0$. 又 A 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq 0$ 有 $(Bx)^TA(Bx)>0$. 于是当 $x\neq 0$ 时，$x^T(B^TAB)x>0$，故 B^TAB 为正定矩阵.

必要性的另一证法：因 B^TAB 正定，所以 $r(B^TAB)=n$. 但另一方面 $r(B^TAB)\leqslant r(B)\leqslant n$，所以 $r(B)=n$.

注　正定矩阵是由二次型的正定性引入的，所以首先需要验证 B^TAB 是实对称矩阵；充分性的证明是采用定义法完成的，当然还可以采用特征值法完成：设 λ 是 B^TAB 的特征值，α 是对应于 λ 的特征向量，于是 $(B^TAB)\alpha=\lambda\alpha$，用 α^T 左边乘式子两端有 $\alpha^T(B^TAB)\alpha=\lambda\alpha^T\alpha$，即 $(B\alpha)^TA(B\alpha)=\lambda\alpha^T\alpha$，又 $r(B)=n$，$\alpha\neq 0$，则 $B\alpha\neq 0$，而 $\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2>0$，且 A 是正定矩阵，于是 $\alpha^T(B^TAB)\alpha=\lambda\alpha^T\alpha>0\Rightarrow\lambda>0$，所以 B^TAB 正定.

10 [2005 数学三]　设 $D=\begin{pmatrix}A & C\\ C^T & B\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A,B 为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(Ⅰ)计算 P^TDP，其中 $P=\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{pmatrix}$；

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果判断矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

(Ⅰ)解　因 $P^T=\begin{pmatrix}E_m & O\\ -C^TA^{-1} & E_n\end{pmatrix}$，有

$$P^TDP=\begin{pmatrix}E_m & O\\ -C^TA^{-1} & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ C^T & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B-C^TA^{-1}C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}C\\ O & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B-C^TA^{-1}C\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ)证　矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是正定矩阵.

由(Ⅰ)的结果知，矩阵 D 合同于矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B-C^TA^{-1}C\end{pmatrix}.$$

又 D 为正定矩阵，可知矩阵 M 为正定矩阵，从而 M 的各阶顺序主子式大于零，于是 $B-C^TA^{-1}C$ 的各阶顺序主子式也大于零. 因矩阵 M 为对称矩阵，故 $B-C^TA^{-1}C$ 为对称矩阵，故 $B-C^TA^{-1}C$ 为正定矩阵.

6.3　合同问题

(1) A,B 是同型矩阵，则

$$A,B\text{ 等价}\Leftrightarrow A\text{ 经过有限次初等变换得 }B$$
$$\Leftrightarrow\text{有可逆阵 }P,Q,\text{使 }PAQ=B$$
$$\Leftrightarrow r(A)=r(B).$$

(2) A,B 是同阶方阵，则

$$A,B\text{ 相似}\Leftrightarrow\text{有可逆阵 }P,\text{使 }P^{-1}AP=B.$$

(3) A,B 是同阶方阵，则

A,B 合同 $\Leftrightarrow$ 有可逆阵 C，使 $C^TAC=B$

$\Leftrightarrow x^TAx$，x^TBx 有相同的正、负惯性指数，或有相同的秩及正(或负)惯性指数.

11 [2007] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则 A 与 B

(A)合同且相似.　　(B)合同,但不相似.

(C)不合同,但相似.　　(D)既不合同,也不相似.

答 应选(B).

解 因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2,$$

所以矩阵 A 的特征值为 3,3,0. 由此可知矩阵 A 与 B 不相似,从而选项(A)和(C)错误.

又因为实对称矩阵 A 相似且合同于对角矩阵

$$C=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

而矩阵 C 显然合同于矩阵 B,根据合同关系的传递性知矩阵 A 合同于 B,即选项(B)正确.

12 [2008] 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 A 合同的矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

答 应选(D).

解 直接观察可知各矩阵的秩均为 2,亦即各选项的矩阵的秩都等于矩阵 A 的秩. 求矩阵 A 的特征值如下:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1),$$

即 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$. 由此可知矩阵 A 的正惯性指数为 1,类似可得:

矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ 的特征值为 $-3,-1$,正惯性指数为 0;

矩阵 $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ 的特征值为 1,3,正惯性指数为 2;

矩阵 $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值为 1,3,正惯性指数为 2;

矩阵 $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $3,-1$,正惯性指数为 1.

由此可知与矩阵 A 合同的是 $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$(事实上,它们还是相似的),即选项(D)正确.